

〔 I 〕

(1)

(*)に $a=1, b=16$ を代入して,

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 &= \log_2 (4x) \\ \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= -1, 2 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, 4\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{2}, 4$$

(2)

$X = \log_2 x$ とおくと(*)は,

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 &= \log_2 (\sqrt{b}x^a) \\ \Leftrightarrow X^2 &= \frac{1}{2}\log_2 b + aX \\ \Leftrightarrow X^2 - aX - \frac{1}{2}\log_2 b &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned}x &= 2\sqrt{2}, \frac{b}{4} \\ \Leftrightarrow X &= \frac{3}{2}, \log_2 b - 2\end{aligned}$$

より, ①は $X = \frac{3}{2}, \log_2 b - 2$ のみを解にもつ。したがって, 解と係数の関係から,

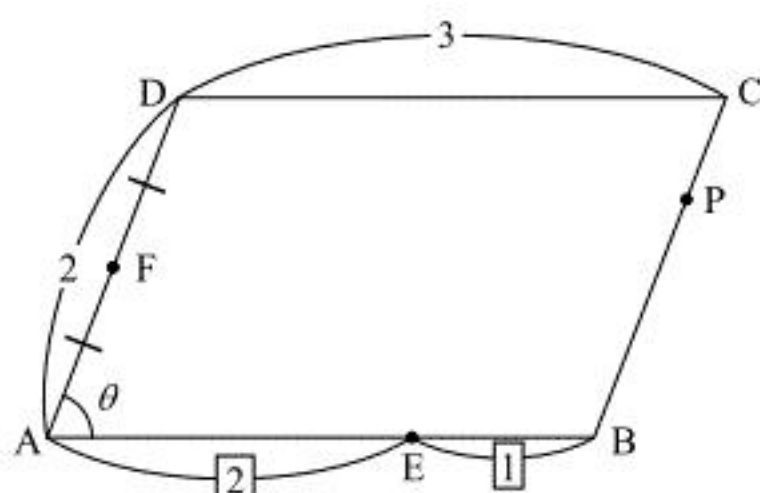
$$\begin{aligned}\begin{cases} a = \frac{3}{2} + \log_2 b - 2 \\ -\frac{1}{2}\log_2 b = \frac{3}{2}(\log_2 b - 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} + \log_2 b \\ \log_2 b = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=1, b=2\sqrt{2}$$

〔Ⅱ〕

(1)



以後、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおく。また、点 P は辺 BC 上の点であるから、実数 t ($0 \leq t \leq 1$) を用いて $\overrightarrow{BP} = t\vec{d}$ と表せる。また、

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = |\vec{b}| |\vec{d}| \cos \angle BAD = 6 \cos \theta$$

である。したがって、上図より、

$$\begin{aligned} k &= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EP} \\ &= \left(-\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} \right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + t\vec{d} \right) \\ &= -\frac{2}{9}|\vec{b}|^2 + \left(-\frac{2}{3}t + \frac{1}{6} \right) \vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{2}t|\vec{d}|^2 \\ &= 2t - 2 + (-4t + 1) \cos \theta \end{aligned}$$

となる。よって、 $\theta = 30^\circ$, $t = 1$ を代入して、 $k = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ を得る。

(答) $k = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} k &= 2t - 2 + (-4t + 1) \cos \theta \\ &= 2t(1 - 2 \cos \theta) - 2 + \cos \theta \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。P の位置によらず k の値が一定であるのは、①が t の値によらず一定となるときであり、

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \end{aligned}$$

が成立する。またこのとき、これを①に代入して、 $k = -\frac{3}{2}$ を得る。

(答) $\theta = 60^\circ$, $k = -\frac{3}{2}$

(3)

$$\begin{aligned} EF &= EP \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{EF}|^2 &= |\overrightarrow{EP}|^2 \\ \Leftrightarrow \left| -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} \right|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{b} + t\vec{d} \right|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}|\vec{d}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}t\vec{b} \cdot \vec{d} + t^2|\vec{d}|^2 \\ \Leftrightarrow 5 - 4 \cos \theta &= 1 + 4t \cos \theta + 4t^2 \\ \Leftrightarrow 4(1 + t) \cos \theta &= 4(1 - t^2) \\ \therefore \cos \theta &= 1 - t \quad (\because t \neq -1) \end{aligned}$$

である。ここで、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$, $0 \leq t \leq 1$ より、 $0 < t \leq 1$ を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} k &= -1 \\ \Leftrightarrow 2t - 2 + (-4t + 1) \cos \theta &= -1 \\ \Leftrightarrow 2t - 1 + (-4t + 1)(1 - t) &= 0 \quad (\because \cos \theta = 1 - t) \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 3t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{4} \quad (\because 0 < t \leq 1) \end{aligned}$$

となる。よって、BP:PC=3:1 と求まる。

(答) 3:1

〔Ⅲ〕

(1)

$a=21$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 21 &= -x^2 + 8x + 9 \\ \Leftrightarrow 12x &= 12 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

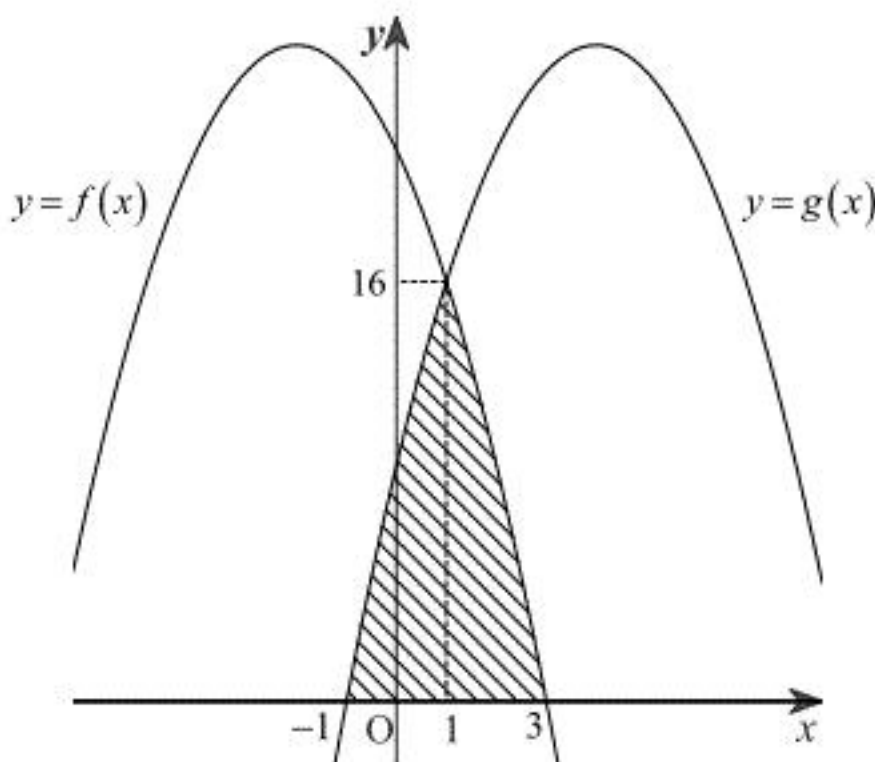
である。また、 $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \leq 1$, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 1 < x$ である。したがって、

$$m(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leq 1) \\ f(x) & (1 < x) \end{cases}$$

となる。

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x+7)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= -7, 3 \\ g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x+1)(x-9) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 9 \end{aligned}$$

であるから、曲線 $y=m(x)$ と x 軸で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (-x^2 + 8x + 9) dx + \int_1^3 (-x^2 - 4x + 21) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 9x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 21x \right]_1^3 \\ &= \frac{104}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{104}{3}$

(2)

まず、 ℓ と $g(x)$ の接点を求める。 $g'(x) = -2x + 8$ より、接点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2 &= -2x + 8 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

となる。これより、 ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2(x-3) + g(3) \\ &= 2x + 18 \end{aligned}$$

となる。また、 ℓ は $y=f(x)$ の接線でもある。すなわち、

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x + 18 - (-x^2 - 4x + a) \\ &= x^2 + 6x + 18 - a \end{aligned}$$

とすると、 $h(x) = 0$ の判別式 D は、 $D = 0$ を満たす。つまり、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^2 - (18 - a) &= 0 \\ \therefore a &= 9 \end{aligned}$$

となる。ここで、 ℓ と $f(x)$ の接点の x 座標は、

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -3 \end{aligned}$$

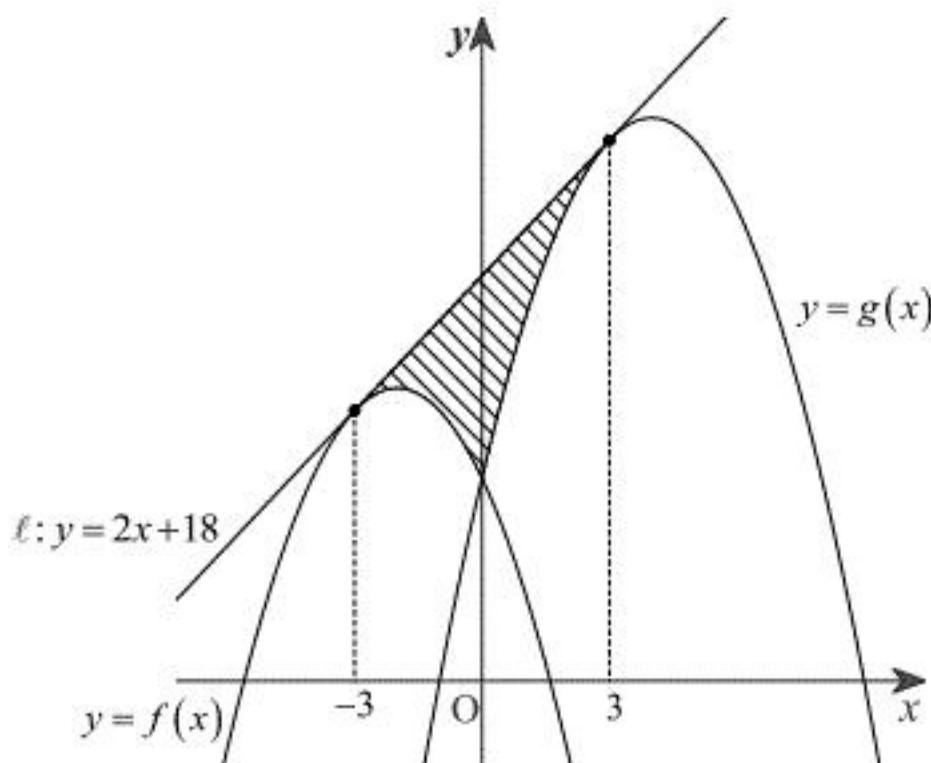
となる。また、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 9 &= -x^2 + 8x + 9 \\ \Leftrightarrow 12x &= 0 \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \leq 0$, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 0 < x$ である。したがって、

$$M(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ g(x) & (0 < x) \end{cases}$$

である。以上より、曲線 $y=M(x)$ と直線 ℓ で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



よって求める面積は、

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^0 \{(2x+18) - (-x^2 - 4x + 9)\} dx + \int_0^3 \{(2x+18) - (-x^2 + 8x + 9)\} dx \\ &= \int_{-3}^0 (x^2 + 6x + 9) dx + \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x \right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

である。

(答) $a=9$ 、面積18