

【Ⅰ】

(1)

直線 ℓ の傾きは 2 であるから、直線 ℓ に垂直な直線の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} 2 \cdot m &= -1 \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これと点 Q_1 の座標が $(p, 0)$ であることより、直線 Q_1P_2 の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}(x - p)$$

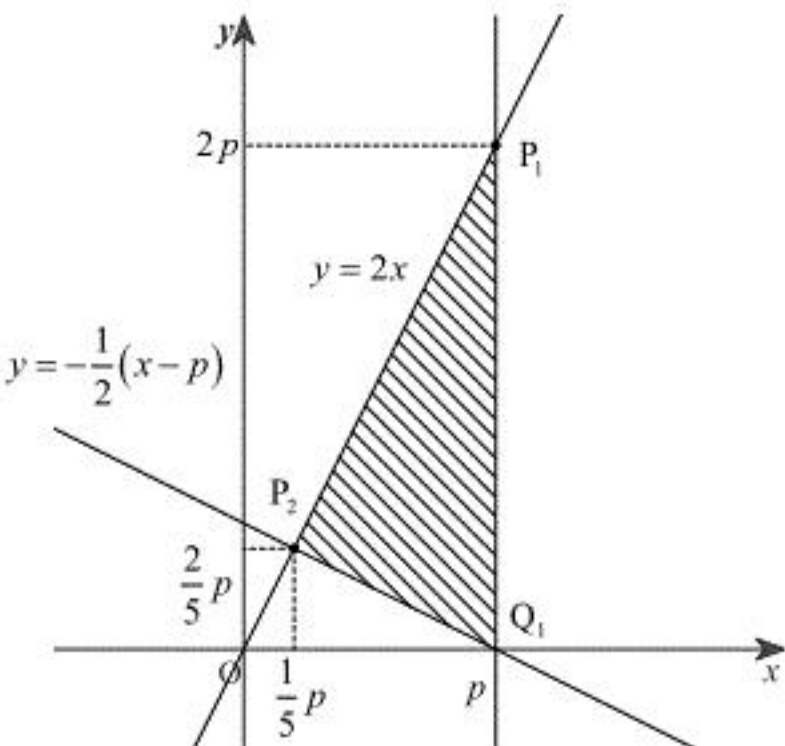
となる。これと直線 ℓ の方程式 $y = 2x$ から、 y を消去すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(x - p) &= 2x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{5}p \end{aligned}$$

となり、これを $y = 2x$ に代入すると

$$y = \frac{2}{5}p$$

となるから、点 P_2 の座標は $\left(\frac{1}{5}p, \frac{2}{5}p\right)$ である。以上より、 $\triangle P_1P_2Q_1$ を図示すると、下図の斜線部分のようになる。



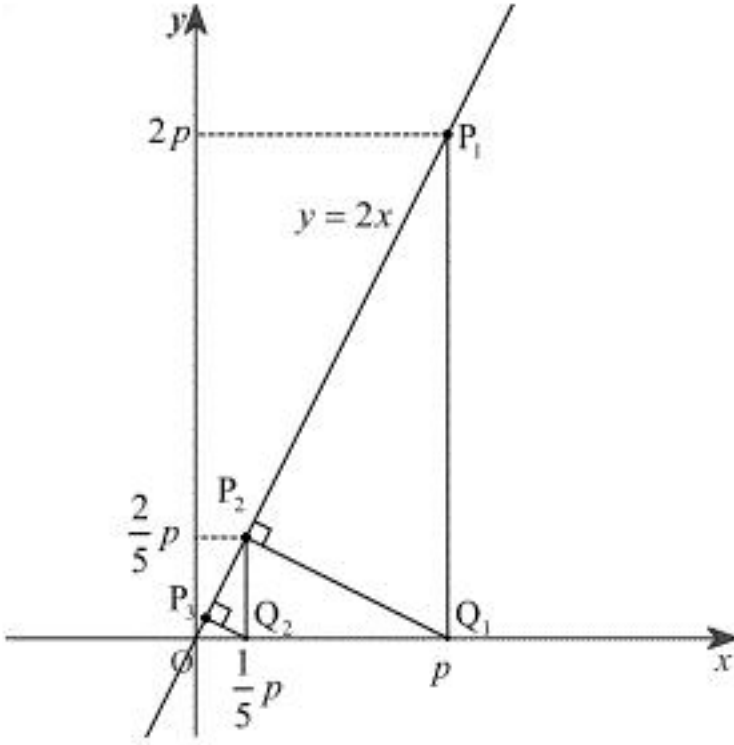
上図より、 $\triangle P_1P_2Q_1$ は底辺が $2p$ 、高さが $\frac{4}{5}p$ であるから

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{4}{5}p \\ &= \frac{4}{5}p^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $P_2\left(\frac{1}{5}p, \frac{2}{5}p\right), a_1 = \frac{4}{5}p^2$

(2)(i)



$\triangle P_1P_2Q_1, \triangle P_2P_3Q_2$ を図示すると上図のようになる。 $\triangle P_1P_2Q_1, \triangle P_2P_3Q_2$ において、 $\angle P_1P_2Q_1 = \angle P_2P_3Q_2 = 90^\circ$ である。また、 P_1Q_1 と P_2Q_2 は平行であるから、 $\angle P_2P_1Q_1 = \angle P_3P_2Q_2$ である。よって、 $\triangle P_1P_2Q_1, \triangle P_2P_3Q_2$ の 2 組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle P_1P_2Q_1, \triangle P_2P_3Q_2$ は相似である。よって

$$\begin{aligned} P_1Q_1 : P_2Q_2 &= 2p : \frac{2}{5}p \\ &= 5 : 1 \end{aligned}$$

より、 $\triangle P_1P_2Q_1$ と $\triangle P_2P_3Q_2$ の相似比は $5 : 1$ となり、 $\triangle P_1P_2Q_1$ と $\triangle P_2P_3Q_2$ の面積比は $5^2 : 1^2$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{1^2}{5^2} \\ &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{25}$

(ii)

(2)(i)と同様にして、 $\triangle P_kP_{k+1}Q_k$ と $\triangle P_{k+1}P_{k+2}Q_{k+1}$ が相似であり、その相似比が $5 : 1$ であることが示される。よって、 $\triangle P_kP_{k+1}Q_k, \triangle P_{k+1}P_{k+2}Q_{k+1}$ の面積比は $5^2 : 1^2$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{1^2}{5^2} \\ \Leftrightarrow a_{k+1} &= \frac{1}{25}a_k \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{a_k\}$ は初項 $a_1 = \frac{4}{5}p^2$ 、公比 $\frac{1}{25}$ の等比数列であるから

$$a_k = \frac{4}{5}p^2 \left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}$$

となる。

(答) $a_k = \frac{4}{5}p^2 \left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}$

(3)

$$a_k = \frac{4}{5}p^2 \left(\frac{1}{25}\right)^{k-1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{4}{5}p^2 \left(\frac{1}{25}\right)^{k-1} \\ &= \frac{4}{5}p^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{25}\right)^n}{1 - \frac{1}{25}} \\ &= \frac{5}{6}p^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{25}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}p^2 - S_n &= \frac{5}{6}p^2 - \frac{5}{6}p^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{5}{6}p^2 \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $S_n < \frac{5}{6}p^2$ となる。

(証明終)

【Ⅱ】

(1)

放物線 F と円 C は y 軸に関して対称であるから

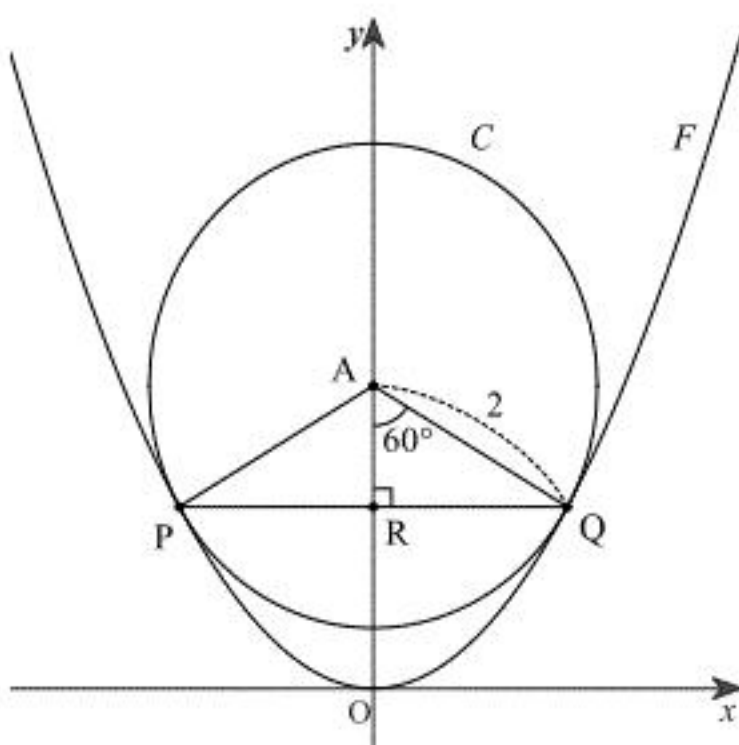
$$\begin{aligned}\angle OAQ &= \frac{1}{2} \angle PAQ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

である。よって、直線 AQ と x 軸正方向とのなす角は $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ であり、直線 AQ の傾

きは $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

(答) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2)



直線 PQ と y 軸との交点を R とする。また、点 A の y 座標を c (c は正の実数) とおく。上図より、点 Q の x 座標は

$$\begin{aligned}AQ \sin 60^\circ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

であり、点 Q の y 座標は

$$\begin{aligned}OA - AR &= OA - AQ \cos 60^\circ \\ &= c - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= c - 1\end{aligned}$$

である。これらを放物線 F の方程式 $y = ax^2$ に代入すると

$$\begin{aligned}c - 1 &= a \cdot (\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow c &= 3a + 1 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となるから、点 A の座標は $(0, 3a + 1)$ である。また、点 Q の y 座標は $c - 1 = 3a$ となるから、点

Q の座標は $(\sqrt{3}, 3a)$ である。さらに、2 点 P, Q は y 軸に関して対称であるから、点 P の座標

は $(-\sqrt{3}, 3a)$ である。ここで、 $y = ax^2$ を微分すると $y' = 2ax$ であるから、放物線 $y = ax^2$ の点

Q における接線は

$$\begin{aligned}y - 3a &= 2a \cdot \sqrt{3} (x - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}ax - y - 3a &= 0\end{aligned}$$

であり、この直線と点 A の距離が 2 であるから

$$\begin{aligned}\frac{|2\sqrt{3}a \cdot 0 - (3a + 1) - 3a|}{\sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 + (-1)^2}} &= 2 \\ \Leftrightarrow |6a + 1| &= 2\sqrt{12a^2 + 1}\end{aligned}$$

となり、両辺正より、2 乗すると

$$\begin{aligned}(6a + 1)^2 &= (2\sqrt{12a^2 + 1})^2 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a - 1)^2 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $P(-\sqrt{3}, 3a), Q(\sqrt{3}, 3a), A(0, 3a + 1), a = \frac{1}{2}$

(3)

$a = \frac{1}{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}c &= 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

であるから、円 C の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 4$$

となる。また、これに $y = 1$ を代入すると

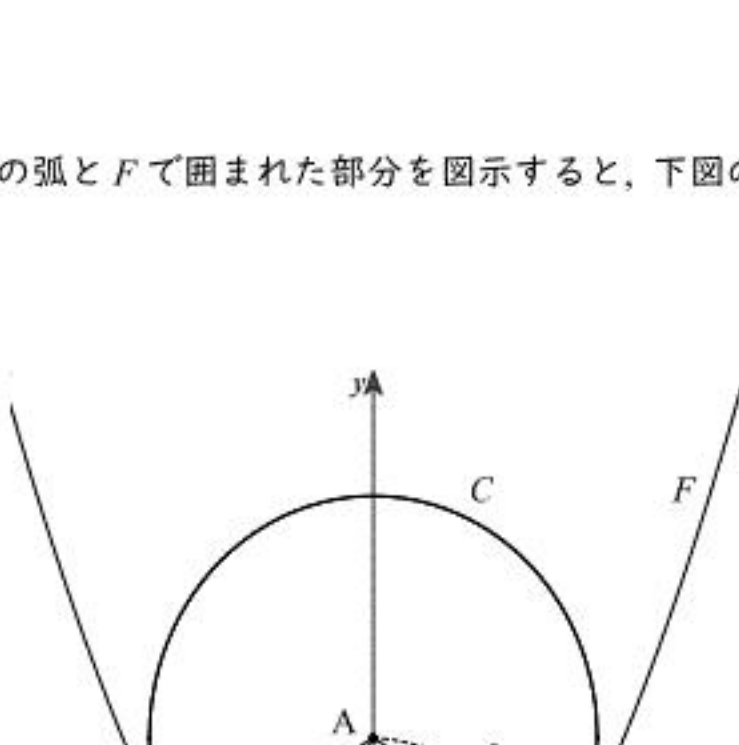
$$\begin{aligned}x^2 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{7}{4} \\ \therefore x &= \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\end{aligned}$$

となるから、 $y = 1$ である円 C 上の点の座標は $\left(\pm \frac{\sqrt{7}}{2}, 1\right)$ である。

(答) $x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 4, \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{2}, 1\right)$

(4)

弧 PQ のうち、短い方の弧と F で囲まれた部分を図示すると、下図の斜線部分のようになる。



上図のように点 S, T, U を定め、放物線 F と線分 TQ と線分 OT で囲まれる領域を D とする。上図の斜線部分の図形は y 軸に関して対称であるから、 $x \geq 0$ の部分の面積について考えると、この部分の面積は

$$(\text{台形 } AOTQ \text{ の面積}) - (\text{扇形 } AUQ \text{ の面積}) - (\text{領域 } D \text{ の面積})$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{3} - 2^2 \cdot \pi \cdot \frac{60}{360} - \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi - \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

$$\therefore S = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

となる。

(答) $S = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

〔Ⅲ〕

(1)(i)

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - ax^2 + 5 \cdot 1 \cdot x - 2 \cdot 1 \\ &= x^3 - ax^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

となり、 $x = 2$ は $f(x) = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^3 - a \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ となるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x + 5 \\ &= (3x - 5)(x - 1) \end{aligned}$$

より、 $f'(x) = 0$ を満たす x の値は $x = 1, \frac{5}{3}$ である。

(答) $a = 4, x = 1, \frac{5}{3}$

(ii)

(i)より、関数 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	1	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$

よって、関数 $f(x)$ は $x = 1$ で極大値 0 をとり、 $x = \frac{5}{3}$ で極小値 $-\frac{4}{27}$ をとる。また、

$$f(x) = (x - 2)(x - 1)^2$$

より、 $f(x) = 0$ の解で $x \neq 2$ であるものは $x = 1$ である。

(答) 増減表：前表、 $x = 1$ で極大値 0 、 $x = \frac{5}{3}$ で極小値 $-\frac{4}{27}$

$f(x) = 0$ の解で $x \neq 2$ であるものは $x = 1$

(2)

$x = 2$ は $f(x) = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^3 - a \cdot 2^2 + 5 \tan \theta \cdot 2 - 2 \tan \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 + 2 \tan \theta \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - ax^2 + 5 \tan \theta \cdot x - 2 \tan \theta \\ &= x^3 - (2 + 2 \tan \theta)x^2 + 5 \tan \theta \cdot x - 2 \tan \theta \\ &= (x - 2)(x^2 - 2 \tan \theta \cdot x + \tan \theta) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 2 + 2 \tan \theta, f(x) = (x - 2)(x^2 - 2 \tan \theta \cdot x + \tan \theta)$

(3)

①より、 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解、あるいは異なる 2 つの実数解をもつとき

$$x^2 - 2 \tan \theta \cdot x + \tan \theta = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

は実数解をもち、 $x = 2$ を重解にもたない。②が実数解をもつことより、②の判別式は 0 以上となるから

$$\begin{aligned} (-2 \tan \theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \tan \theta &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \tan \theta (\tan \theta - 1) &\geq 0 \\ \therefore \tan \theta \leq 0, 1 \leq \tan \theta \end{aligned}$$

が得られ、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $1 \leq \tan \theta$ である。ここで、②が重解をもつとき、②の判別式は 0

となるから、 $\tan \theta = 1$ であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となるが、(1)(ii)より、このときの②の重

解は $x = 1$ であるから、②は $x = 2$ を重解にもたない。よって、 $1 \leq \tan \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、求め

る θ の値の範囲は $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

(答) $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$