

【I】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ	エ	オ
		4	9	5	1	5
	(ii)	カ	キ	ク	ケ	
		9	0	1	8	
(2)		コ	サ	シ	ス	セ
		4	7	2	1	4
(3)		ソ	タ	チ		
		1	5	2		

【解説】

(1)(i)

カードの並べ方の総数は2が書かれたカードの並べる位置を考えて

$${}_{12}C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 495 \text{ (通り)}$$

である。また、左から数えて奇数番目のいずれかに1が書かれたカードを2枚並べると考えると、左から数えて偶数番目のカードが必ず1のカードである並べ方は、

$${}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$$

$$= 15 \text{ (通り)}$$

である。

(ii)

奇数番目に並べるカードのみに着目して考える。奇数番目に並べるカードは、偶数番目に並べる1が書かれた6枚のカードを除いて、1が書かれたカードが2枚、2が書かれたカードが2枚、3が書かれたカードが2枚である。それらの並べ方の総数は

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ (通り)}$$

である。また、列の両端のカードが1であり、1が書かれたカード同士がちょうど1枚のカードと隣り合うとき、下記のように2枚並んだ1が書かれたカードのセットの間の○に2と3が書かれたカードを配置すると考える。

$$\boxed{11} \circ \boxed{11} \circ \boxed{11} \circ \boxed{11}$$

2と3が書かれたカードの並べ方は $\frac{4!}{2!2!} = 6$ (通り) であり、1が書かれたカード2組を両端に、

もう2組を2と3が書かれたカードの間から選んで配置すると考えると、求めるカードの並べ方の総数は

$$6 \cdot {}_3C_2 = 18 \text{ (通り)}$$

である。

(2)

$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 6$ は実数係数多項式であるため、方程式 $P(x) = 0$ が $x = 1 - \sqrt{2}i$ を解に持つならば $x = 1 + \sqrt{2}i$ も解に持つ。ここで、 $(1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) = 2$ 、 $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3$ より、解と係数の関係から $x^2 - 2x + 3 = 0$ は $1 \pm \sqrt{2}i$ を解に持つ2次方程式の1つである。したがって、 $P(x)$ は $x^2 - 2x + 3$ で割り切れる。 $P(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割った式は

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)\{x - (a - 2)\} + (-2a + b + 1)x + (3a - 12) \quad \cdots \text{①}$$

であり、あまりが0であることから、

$$\begin{cases} -2a + b + 1 = 0 \\ 3a - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore a = 4, b = 7$$

と a, b が求まる。これを①に代入すると、

$$P(x) = (x^2 - 2x + 3)(x - 2)$$

となり、もう1つの解は $x = 2$ である。

(3)

条件より、

$$x^3 + x^2 + px + q = (x - r)(x + 1)(x + 2) + 5x + 9$$

が成り立つ。この式に $x = -1, -2, 0$ を代入して整理して解くと

$$\begin{cases} p - q = -4 \\ 2p - q = -3 \\ q = -2r + 9 \end{cases}$$

$$\therefore p = 1, q = 5, r = 2$$

となる。

〔Ⅱ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	1	6	7	6			
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	6	2	2	2	2	5	1
	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	0	2	6	8	7	8	

〔解説〕

(1)

点Cは辺OAを2:1に内分するため、 $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a}$ が成り立つ。同様に、点Dは辺OBを3:1に内

分するため、 $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}\vec{b}$ である。ここで、点Eは辺AD, BC上にあるから、 $\overrightarrow{OE}$ は実数 s, t を用

いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} + t(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{a} + t\left(\frac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + s(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \vec{b} + s\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b}\end{aligned}$$

の2通りで表せる。2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるため係数を比較して解くと

$$\begin{cases} 1-t = \frac{2}{3}s \\ \frac{3}{4}t = 1-s \end{cases} \\ \therefore s = \frac{1}{2}, t = \frac{2}{3}$$

となる。以上より、 $\textcircled{1}$ に $t = \frac{2}{3}$ を代入して整理すると $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ である。

(2)

条件より、 $|\vec{a}| = 3, OA \perp BC, OE \perp AB$ であり、垂直条件は、言い換えるとそれぞれ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{2}$ に $|\vec{a}| = 3$ を代入し整理すると、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 6\end{aligned}$$

である。また、 $\textcircled{3}$ を整理すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |\vec{b}|^2 &= 8 \\ \therefore |\vec{b}| &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。また、内積の定義式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ より、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となり、これより $\theta = 45^\circ$ である。また、 $|\overrightarrow{AB}|^2$ について、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 5\end{aligned}$$

より、 $AB = \sqrt{5}$ である。したがって、三角形OABにおいて正弦定理から

$$R = \frac{AB}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

である。 $OC : CA = 2 : 1, OM = MA$ より、 $OC = 2, OM = \frac{3}{2}$ である。三角形OBC, OHMにおい

て三平方の定理より、

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{OB^2 - OC^2} = 2 \\ HM &= \sqrt{OH^2 - OM^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。また、線分BC, HMはともに直線OAに直交することより、平行であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MH} \\ &= \overrightarrow{OM} + \frac{|\overrightarrow{MH}|}{|\overrightarrow{CB}|} \overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

〔Ⅲ〕

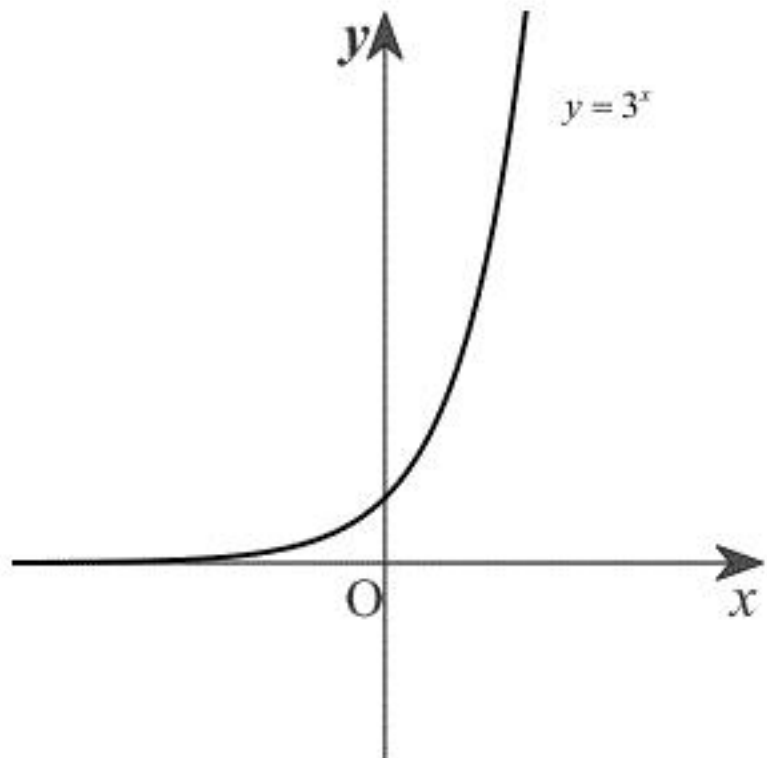
〔解答〕

(1)	ア	イ					
	0	2					
(2)	ウ						
	2						
(3)	エ						
	2						
(4)	オ						
	0						
(5)	カ						
	0						
(6)	(i)	キ	ク	ケ			
		0	1	0			
	(ii)	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
		0	1	4	2	1	0

〔解説〕

(1)

曲線 $y = 3^x$ は以下のような曲線であり、値域は正の実数全体で右上がりの曲線である。



(2)

$X = 3^x$ のとき、指数法則より

$$\begin{aligned} 9^x &= (3^x)^2 \\ &= X^2 \end{aligned}$$

である。

(3)

$X = 3^x$ のとき

$$\begin{aligned} 9^x - 8 \times 3^x - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 - 8X - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X - 9)(X + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となり、 $X > 0$ より、

$$\begin{aligned} X &= 9 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 9 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

となるから、求める解は $x = 2$ である。

(4)

方程式 $2 \times 9^x + 7 \times 3^x + 3 = 0$ の左辺はすべての項が正であるため左辺が 0 になることはない。したがって、この方程式の解の個数は 0 である。

(5)

方程式 $9^x - a \times 3^x + 1 = 0$ が異なる 2 つの解 u, v を持つとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} 3^u + 3^v = a \\ 3^u \cdot 3^v = 1 \end{cases}$$

が成り立つため、指数法則より $3^{u+v} = 1$ となる。すなわち $u + v = 0$ である。

(6)(i)

方程式 $9^x - b \times 3^x + c = 0$ の解の個数は、方程式 $X^2 - bX + c = 0$ の異なる正の実数解の個数に等しい。ここで、 $f(X) = X^2 - bX + c$ として、方程式 $f(X) = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4c$ 、解を p, q と置く。このとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} p + q = b \\ pq = c \end{cases}$$

である。 $b \leq 0$ のときを考えていく。このとき、 $f(X)$ の $X^2 - bX$ が正となるから c の値が 0 以上かそれ未満かで場合分けを行う。

[ア] $c < 0$ のとき

常に $D > 0$ であるため、方程式 $f(X) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。ここで、 $pq = c$ でありこれが 0 より小さくなるから 2 つの解は片方が正でもう片方が負である。したがって、元の方程式の解の個数は 1 である。

[イ] $c \geq 0$ のとき

$f(x)$ はつねに正であるから、この場合の解の個数は 0 である。

以上、[ア]、[イ]より、 $c < 0$ のとき、元の方程式の解の個数は 1 であり、 $c \geq 0$ のとき、元の方程式の解の個数は 0 である。

(ii)

$b > 0$ のときを考えていく。このとき、判別式 D の値 $b^2 - 4c$ を正、0、負に場合分けをして考える。

[ウ] $c \leq 0$ のとき

特に $c = 0$ のときは、方程式 $f(X) = 0$ は $X = b$ (b は正)のみを正の解に持つ。 $c < 0$ の場合は[ア]の場合と同様に正の解と負の解を 1 つずつ持つ。したがって、元の方程式の解の個数は 1 である。

[エ] $0 < c < \frac{b^2}{4}$ のとき

$D > 0$ より方程式 $f(X) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。特に、 $p + q = b$ 、 $pq = c$ (b, c はともに正)であるため、 p, q はともに正となる。したがって、元の方程式の解の個数は 2 である。

[オ] $c = \frac{b^2}{4}$ のとき

$D = 0$ より方程式 $f(X) = 0$ は重解を持つ。その解は、 $p + q = b$ より $p = q = \frac{b}{2}$ ($\frac{b}{2}$ は正)であるため、重解は正となる。したがって、元の方程式の解の個数は 1 である。

[カ] $c > \frac{b^2}{4}$ のとき

$D < 0$ より方程式 $f(X) = 0$ は実数解を持たない。したがって、元の方程式の解の個数は 0 である。

以上、[ウ]、[エ]、[オ]、[カ]より、 $c \leq 0$ のとき、元の方程式の解の個数は 1 であり、 $0 < c < \frac{b^2}{4}$ の

とき、元の方程式の解の個数は 2 であり、 $c = \frac{b^2}{4}$ のとき、元の方程式の解の個数は 1 であり、

$c > \frac{b^2}{4}$ のとき元の方程式の解の個数は 0 である。

〔Ⅳ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	0	1	2	0	1	0	4	5	6	4	3
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ					
	3	9	－	1	3	4					

〔解説〕

(1)

$f(x)=|x(x-1)|$ について、
 $f(x)=0$
 $\Leftrightarrow |x(x-1)|=0$
 $\Leftrightarrow x=0,1$

である。 $0<x<1$ のとき、 $x(x-1)<0$ であるため、この範囲で $f(x)=-x(x-1)$ である。2つのグラフ $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ が $0<x<1$ の範囲で共有点を持つとき、この範囲で方程式 $f(x)=g(x)$ が解を持つ。その条件は、 $0<x<1$ の範囲で $f(x)=-x(x-1)$ であることも合わせて、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow -x(x-1) &= ax \\ \Leftrightarrow x(x-1+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -a+1 \end{aligned}$$

より、 $0<-a+1<1$ 、つまり $0<a<1$ である。 a がこの範囲にあるとき、方程式 $f(x)=g(x)$ の $x\leq 0, 1\leq x$ の範囲にある解は、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow x(x-1) &= ax \\ \Leftrightarrow x(x-1-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, a+1 \end{aligned}$$

となり、 $0<a<1$ のとき $1<a+1<2$ であるため、方程式 $f(x)=g(x)$ の解は小さい順に $0, -a+1, a+1$ である。さらに、 $0<a<1$ のとき、 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ のグラフと、2直線 $x=0, x=-a+1$ で挟まれた部分の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-a+1} |f(x)-g(x)| \, dx \\ &= \int_0^{-a+1} -x(x-1+a) \, dx \\ &= \frac{1}{6}(-a+1)^3 \end{aligned}$$

である。

(2)

$h(x)$ の導関数は $h'(x)=-3x^2+2bx+c$ である。 $h(x)$ は $x=3$ で極大値9をとるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} h(3)=9 \\ h'(3)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -27+9b+3c-18=9 \\ -27+6b+c=0 \end{cases} \\ \therefore &b=3, c=9 \end{aligned}$$

である。これを $h'(x)=-3x^2+2bx+c$ に代入すると、

$$\begin{aligned} h'(x) &= -3x^2+6x+9 \\ &= -3(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

となり、 $h(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	9	$\searrow$

よって、確かに $h(x)$ は $x=3$ で極大値9をとり、 $\alpha=-1, \beta=3$ である。ここで、 $\lim_{x\rightarrow\infty} h(x)=-\infty$ であるから $h(-1)$ は極小値であるが最小値ではない。

〔V〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	3	2	3	2	1	3	4	5	2	5	2
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ						
	8	2	5	1	8						

〔解説〕

(1)

等式 $S_{n+2} - 4S_{n+1} + 3S_n = 2$ を変形すると、 $(S_{n+2} - S_{n+1}) - 3(S_{n+1} - S_n) = 2$ となる。 $b_n = S_{n+1} - S_n$ とおくと、 $b_{n+1} - 3b_n = 2$ となる。さらに変形して、 $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ となる。したがって、数列 $\{b_n + 1\}$ は公比 3 の等比数列であるため $b_n + 1 = 3^{n-1}(b_1 + 1)$ であり、

$$\begin{aligned} b_1 &= S_2 - S_1 \\ &= (a_1 + a_2) - a_1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} b_n &= 3^{n-1}(b_1 + 1) - 1 \\ &= 3^n - 1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるから $b_n = a_{n+1}$ より、 a_n の一般項は

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 3^{n-1} - 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

となる。ここから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + \sum_{k=2}^n a_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^k - 1) \\ &= 1 + \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - (n - 1) \\ &= \frac{1}{2}(3^n + 1 - 2n) \end{aligned}$$

である。

(2)

$c_n = \frac{a_{n+1}}{3a_n}$ に対して、 $a_2 = 2, a_3 = 8$ より

$$c_2 = \frac{a_3}{3a_2} = \frac{4}{3}$$

である。 $n \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{3^n - 1}{3(3^{n-1} - 1)} \\ &= \frac{3^n - 1}{3^n - 3} \\ &= 1 + \frac{2}{3^n - 3} \end{aligned}$$

となる。また、 $n \geq 2$ において $\frac{1}{3^n - 3} > \frac{1}{3^{n+1} - 3}$ より $c_n > c_{n+1}$ である。さらに、この範囲において、

$$\begin{aligned} c_n &< \frac{1093}{1092} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3^n - 3} &< \frac{1}{1092} \\ \Leftrightarrow 2187 &< 3^n \end{aligned}$$

であり、 $3^7 = 2187$ であるため、 $c_n < \frac{1093}{1092}$ かつ $n \geq 2$ を満たす最小の n は 8 である。

〔Ⅵ〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	7	3	2	4			
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	7	0	3	1	0	0	8
(3)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	6	4	3	2	9	5	

〔解説〕

(1)

$$f(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2(e^t+e^{-t})} \text{ の極限について,}$$

$$\lim_{t\rightarrow-\infty} f(t)=\lim_{t\rightarrow-\infty} \frac{e^{2t}-1}{2(e^{2t}+1)}=\frac{0-1}{2(0+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\rightarrow\infty} f(t)=\frac{1-e^{-2t}}{2(1+e^{-2t})}=\frac{1-0}{2(1+0)}=\frac{1}{2}$$

である。また、 $f(t)$ を微分すると、

$$f'(t)=\frac{1}{2}\left\{\frac{(e^t-e^{-t})'(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})(e^t+e^{-t})'}{(e^t+e^{-t})^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2}$$

$$=\frac{2}{(e^t+e^{-t})^2}$$

である。

(2)

(1)よりすべての実数 t で $f'(t)>0$ であるため、 $f(t)$ は単調増加する。

$\lim_{t\rightarrow-\infty} f(t)=-\frac{1}{2}, \lim_{t\rightarrow\infty} f(t)=\frac{1}{2}$ であるため、 $f(t)$ は $-\frac{1}{2}$ より大きく $\frac{1}{2}$ 未満の値をちょうど1回ずつ取る。したがって、方程式 $f(t)=k$ の解の個数は $k\leq-\frac{1}{2}$ のとき0個であり、 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ のとき1個であり、 $\frac{1}{2}\leq k$ のとき0個である。特に、方程式 $f(\alpha)=0$ を解くと、

$$f(\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha}-e^{-\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow e^{2\alpha}=1$$

$$\therefore \alpha=0$$

であり、方程式 $f(\beta)=\frac{2}{5}$ を解くと、

$$f(\beta)=\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2(e^{\beta}+e^{-\beta})}=\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(e^{2\beta}-1)=e^{2\beta}+1$$

$$\Leftrightarrow e^{\beta}=3$$

$$\therefore \beta=\log 3$$

である。

(3)

$f(t)$ は単調増加し、 $g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ は $t>0$ で正であるため、曲線 C と x 軸、直線 $x=0, x=\frac{2}{5}$

で囲まれた部分の面積 S は、(2)より $0=f(0), \frac{2}{5}=f(\log 3)$ であるから

$$S=\int_0^{\frac{2}{5}} ydx$$

$$=\int_0^{\log 3} g(t)\frac{df(t)}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\log 3} \frac{e^t-e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}dt$$

となる。さらに、 $u=e^t+e^{-t}$ と置換すると、 $du=(e^t-e^{-t})dt$ であり、

t	0	→	$\log 3$
u	2	→	$\frac{10}{3}$

となるため、

$$S=\int_0^{\log 3} \frac{e^t-e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2}dt$$

$$=\int_2^{\frac{10}{3}} u^{-2}du$$

$$=\left[-\frac{1}{u}\right]_2^{\frac{10}{3}}$$

$$=\frac{1}{5}$$

となる。

〔Ⅶ〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
5	2	2	1	1	1	4	3	5	4
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
2	1	0	1	－	1	7	8	5	4

〔解説〕

α は $f(\alpha)=0$ を満たす実数より、 $f(\alpha)=0$ を解くと

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(\log \alpha)^2 - 4\alpha \log \alpha + 4\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(\log \alpha - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \alpha &= 2 \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ より $\alpha = e^2$ となる。 $f(x)$ の導関数と第2次導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left\{ (\log x)^2 + x \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x \right\} - 4 \left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x \right) + 4 \\ &= (\log x - 2) \log x \\ f''(x) &= \frac{1}{x} \cdot \log x + (\log x - 2) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2(\log x - 1)}{x} \end{aligned}$$

である。したがって、 $f(x)$ の凹凸を含めた増減は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...	e	...	e^2	...
$f'(x)$		+	0	－		－	0	+
$f''(x)$		－		－	0	+		+
$f(x)$		↗	4	↘	e	↘	0	↗

上表より、 $0 < x < 1$ において、 $f(x)$ はつねに増加し C は上に凸であり、 $1 < x < e$ において、 $f(x)$ はつねに減少し C は上に凸であり、 $e < x < e^2$ において、 $f(x)$ はつねに減少し C は下に凸であり、 $e^2 < x$ において $f(x)$ はつねに増加し C は下に凸である。ここで、問題文の不定積分について、

$$\begin{aligned} \int x \log x dx &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + K \end{aligned}$$

$$\int x (\log x)^2 dx = \frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - \int x \log x dx$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left\{ x (\log x)^2 - 4x \log x + 4x \right\} dx \\ &= \int x (\log x)^2 dx - 4 \int x \log x dx + 4 \int x dx \\ &= \left\{ \frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - \int x \log x dx \right\} - 4 \int x \log x dx + 4 \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - 5 \int x \log x dx + 4 \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - 5 \left(\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right) + 2x^2 + L \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - \frac{5}{2} x^2 \log x + \frac{13}{4} x^2 + L \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、直線 $x = 1$ 、 $x = e^2$ で囲まれる部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} f(x) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\log x)^2 - \frac{5}{2} x^2 \log x + \frac{13}{4} x^2 \right]_1^{e^2} \\ &= \frac{e^4 - 13}{4} \end{aligned}$$

である。