

〔1〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
2	7	1	8	2	7

〔解説〕

$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ に $x = 3, -2$ を代入して,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3^4 - 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3a + b = 0 \\ (-2)^4 - 5 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 2a + b = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b - 99 = 0 \\ -2a + b + 36 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

を得る。このとき、4次方程式 $x^4 - 5x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ は,

$$\begin{aligned} & x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 27x + 18 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x^2 - 4x - 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)(x+2)\{(x-2)^2 - 7\} = 0 \\ & \therefore x = 3, -2, 2 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

となるから、他の解は $2 \pm \sqrt{7}$ である。

〔2〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	5	9	1	5	8

〔解説〕

$0 < A < \pi$ より, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ である。△ABC の外接円の半径が2であることから、
正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin A} = 2 \cdot 2$$

$$\therefore BC = 2 \cdot 2 \cdot \sin A = \sqrt{15}$$

である。AB:AC=2:3 より正の実数 x を用いて $AB=2x$, $AC=3x$ とおくと、余弦定理より、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow 15 = 4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2}$$

となる。したがって、三角形 ABC の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{4} x^2$$

$$= \frac{9\sqrt{15}}{8}$$

である。

[3]

[解答]

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
	1	2	1	3	2	0
(2)	キ	ク				
	3	2				

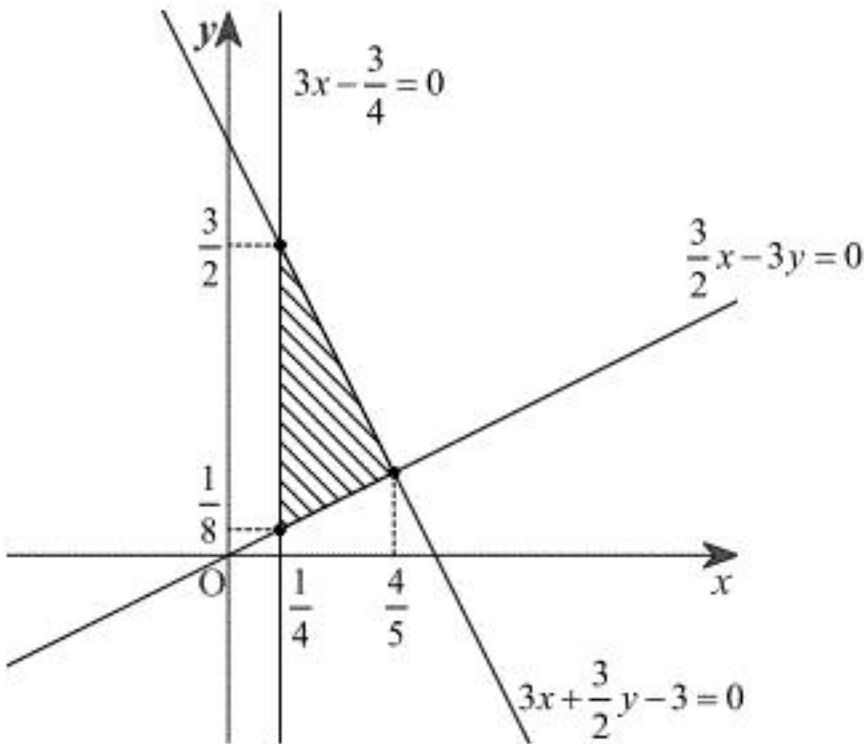
[解説]

(1)

$3x - k = 0$ と $2kx - 3y = 0$ の交点は $(x, y) = \left(\frac{1}{3}k, \frac{2}{9}k^2\right)$, $3x - k = 0$ と $3x + 2ky - 3 = 0$ の交点は

$(x, y) = \left(\frac{1}{3}k, \frac{3-k}{2k}\right)$ (k は正の定数), $2kx - 3y = 0$ と $3x + 2ky - 3 = 0$ の交点は

$(x, y) = \left(\frac{9}{4k^2 + 9}, \frac{6k}{4k^2 + 9}\right)$ である。 $k = \frac{3}{4}$ のとき, D は下図の斜線部となる。



上図より, 三角形 D の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{121}{320}$$

である。

(2)

直線 $2kx - 3y = 0$ の傾きは正, 直線 $3x + 2ky - 3 = 0$ の傾きは負であるから, $2kx - 3y \leq 0$ かつ

$3x + 2ky - 3 \leq 0$ を満たす領域で, 最も x 座標の大きい点は $\left(\frac{9}{4k^2 + 9}, \frac{6k}{4k^2 + 9}\right)$ である。したが

って, $\frac{1}{3}k \leq \frac{9}{4k^2 + 9}$ のとき, D は空集合とならず, そうでないとき D は空集合となる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}k &\leq \frac{9}{4k^2 + 9} \\ \Leftrightarrow k(4k^2 + 9) &\leq 27 \quad (\because 4k^2 + 9 > 0) \\ \Leftrightarrow 4k^3 + 9k - 27 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2k - 3)(2k^2 + 3k + 9) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2k - 3) \left\{ 2 \left(k + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{63}{8} \right\} &\leq 0 \\ \therefore k &\leq \frac{3}{2} \quad \left(\because 2 \left(k + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{63}{8} > 0 \right) \end{aligned}$$

より, D が空集合とならないような k の最大値は $\frac{3}{2}$ である。

〔4〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	1	6	2	4	3
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	9	1	2	4	3
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ
	8	8	2	4	3

〔解説〕

(1)

サイコロの出た目が3, 6のとき、3で割ったときの余りは0、出た目が1, 4のとき余りは1、出た目が2, 5のとき余りは2となり、これらの確率はすべて等しく $\frac{1}{3}$ である。よって、点

(a_i, b_i) は、等確率 $\frac{1}{9}$ で $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$ のいずれかとなる。これら9つの点のうち、3点を通る直線は

$$x=0, 1, 2, y=0, 1, 2, \\ y=x, y=-x+2$$

の8本である。よって、P, Q, Rの入れ替えも考慮すると、求める確率は

$$8 \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{16}{243}$$

である。

(2)

P, Q, Rが互いに異なる点である確率は

$${}_9P_3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{168}{243}$$

である。ここで、P, Q, Rが一直線上にない確率はP, Q, Rが互いに異なる確率から(1)で求めた確率をひいたものであるから、余事象の確率は

$$\frac{168}{243} - \frac{16}{243} = \frac{152}{243}$$

となる。よって、求める確率は、

$$1 - \frac{152}{243} = \frac{91}{243}$$

である。

(3)

P, Q, Rが面積1未満の三角形をなすのは、 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ を結ぶ三角形、または $(0, 0), (1, 0), (2, 1)$ を結ぶ三角形と合同であるときである。 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ を結ぶ三角形は、一辺1の正方形の中に4つ存在し、一辺1の正方形のとりかたは4通りである。

$(0, 0), (1, 0), (2, 1)$ を結ぶ三角形は、短辺1、長辺2の長方形の中に4つ存在し、短辺1、長辺2の長方形のとりかたは4通りである。P, Q, Rの入れ替えも考慮すると、その確率は

$$(4 \cdot 4 + 4 \cdot 4) \cdot 3! \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{64}{243}$$

である。したがって、P, Q, Rが一直線上にないとき、3点P, Q, Rは三角形をなすことから、P, Q, Rが面積1以上の三角形をなす確率は、

$$\frac{152}{243} - \frac{64}{243} = \frac{88}{243}$$

である。

〔5〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	5	4	1	9	2	8	3	1

〔解説〕

等差数列 $\{b_n\}$ の一般項を $b_n = pn + q$ とおくと、 $b_3 = 9, b_8 = 19$ より、

$$\begin{cases} 3p + q = 9 \\ 8p + q = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \end{cases}$$

となるから、 b_n の一般項は $2n + 3$ である。これより、 $n \geq 2$ のとき、 a_n の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 3) \\ &= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n + 3 \cdot (n-1) \\ &= n^2 + 2n - 1 \end{aligned}$$

となり、これは $n = 1$ のときも満たしている。このとき、

$$a_{15} = 15^2 + 2 \cdot 15 - 1 = 254$$

である。

$$n^2 + 2n - 1 < 400$$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2 < 402$$

であり、 $(19+1)^2 = 400 < 402, (20+1)^2 = 441 > 402$ であるから、数列 $\{a_n\}$ において 400 より小

さな項は $n = 1, 2, \dots, 19$ の 19 個である。これらの和は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{19} (n^2 + 2n - 1) &= \frac{1}{6} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 39 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 - 19 \\ &= 19 \cdot (130 + 20 - 1) \\ &= 2831 \end{aligned}$$

となる。

【6】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	1	2	3
(2)	エ	オ	
	3	6	
(3)	カ	キ	ク
	1	6	3

【解説】

(1)

直線 AB の傾きは、

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(1)}{b-1} &= \frac{(b^3-1^3)-3(b^2-1^2)}{b-1} \\ &= b^2+b+1-3(b+1) \\ &= b^2-2b-2\end{aligned}$$

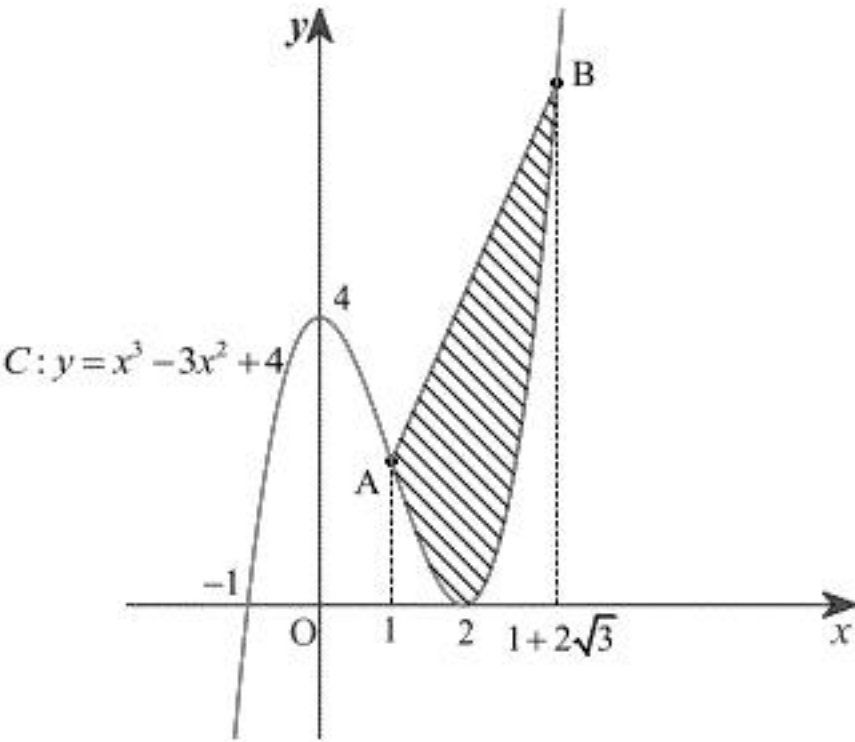
である。これが 9 に等しいから、

$$\begin{aligned}b^2-2b-2 &= 9 \\ \Leftrightarrow (b-1)^2 &= 12 \\ \therefore b &= 1+2\sqrt{3} \quad (\because b>1)\end{aligned}$$

となる。

(2)

$f(x)=(x+1)(x-2)^2$ より、線分 AB と曲線 C で囲まれた部分は下図の斜線部となる。



直線 AB は、点 A(1, 2) を通り、傾きが 9 であるから、その方程式は

$$\begin{aligned}y-2 &= 9(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= 9x-7\end{aligned}$$

である。(1)の過程より、直線 AB は点 $(1-2\sqrt{3}, f(1-2\sqrt{3}))$ も通るから、

$$\begin{aligned}&(x^3-3x^2+4)-(9x-7) \\ &= (x-1)\{x-(1+2\sqrt{3})\}\{x-(1-2\sqrt{3})\}\end{aligned}$$

と因数分解できる。よって、斜線部の面積は、

$$\begin{aligned}&\int_1^{1+2\sqrt{3}} \{(9x-7)-(x^3-3x^2+4)\} dx \\ &= -\int_1^{1+2\sqrt{3}} (x-1)\{x-(1+2\sqrt{3})\}\{x-(1-2\sqrt{3})\} dx\end{aligned}$$

となる。ここで、 $x-1=t$ とおくと、 $dx=dt$ であり

x	1	$\rightarrow$	$1+2\sqrt{3}$
t	0	$\rightarrow$	$2\sqrt{3}$

となるから

$$\begin{aligned}&-\int_1^{1+2\sqrt{3}} (x-1)\{x-(1+2\sqrt{3})\}\{x-(1-2\sqrt{3})\} dx \\ &= -\int_0^{2\sqrt{3}} t(t-2\sqrt{3})(t+2\sqrt{3}) dt \\ &= -\int_0^{2\sqrt{3}} (t^3-12t) dt \\ &= -\left[\frac{t^4}{4}-6t^2\right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= -\left\{\frac{(2\sqrt{3})^4}{4}-6\cdot(2\sqrt{3})^2\right\} \\ &= 36\end{aligned}$$

である。

(3)

点 A と点 B の x 座標の差が $2\sqrt{3}$ であり、直線 AB の傾きが 9 であることから、

$$AB=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{9^2+1^2}}{1}=2\sqrt{246}$$

である。ここで、AB を三角形 ABP の底辺とみると、高さは直線 AB と点 P の距離である。よって、三角形 ABP の面積が最大となるのは、直線 AB と点 P の距離が最大となるとき、すなわち C の点 P における接線の傾きが直線 AB の傾き 9 と一致するときである。ここで、

$1< p < 1+2\sqrt{3}$ を満たす実数 p を用いて点 P の座標を $(p, f(p))$ とおくと、点 P における接線

の傾きが 9 であるとき、 $f'(x)=3x^2-6x$ より

$$\begin{aligned}3p^2-6p &= 9 \\ \Leftrightarrow (p-3)(p+1) &= 0 \\ \therefore p &= 3 \quad (\because 1< p < 1+2\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。このとき、点 P の座標は (3, 4) であるから、直線 AB : $y=9x-7$ との距離は

$$\frac{|9\cdot 3-4-7|}{\sqrt{9^2+1}}=\frac{16}{\sqrt{82}}$$

となる。よって、 $\triangle ABP$ の面積の最大値は

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{246}\cdot \frac{16}{\sqrt{82}}=16\sqrt{3}$$

である。