

【I】

(1)

2 次方程式

$$x^2 - 4bx + 3ab = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

の判別式を D_1 とすると、 $\textcircled{1}$ は重解を持つため

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2b)^2 - 2 \cdot 3ab &= 0 \\ \Leftrightarrow b(2b - 3a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b = 0, \frac{3}{2}a \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、

$$x^2 + 2(a-1)x + 2a^2 - 6a - 5 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

の判別式を D_2 とすると、 $\textcircled{3}$ は実数解を持つため

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 - (b+2a^2-6a-5) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b &\leq -a^2 + 4a + 6 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{2}$ に $a=5$ を代入すると

$$b = 0, \frac{15}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、 $\textcircled{4}$ に $a=5$ を代入すると

$$\begin{aligned} b &\leq -5^2 + 4 \cdot 5 + 6 \\ \Leftrightarrow b &\leq 1 \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $\textcircled{5}$ 、 $\textcircled{6}$ より、 $a=5$ のときの b の値は

$$b = 0$$

である。

(答) $b = 0$

(2)

$\textcircled{2}$ より、 b の値で場合分けを行う。

[1] $b=0$ のとき

このとき、 $\textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} 0 &\leq -a^2 + 4a + 6 \\ \Leftrightarrow 2 - \sqrt{10} &\leq a \leq 2 + \sqrt{10} \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。

[2] $b = \frac{3}{2}a$ のとき

このとき、 $\textcircled{4}$ より

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a &\leq -a^2 + 4a + 6 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 5a - 12 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-4)(2a+3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq a \leq 4 \quad \dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

となる。また、 $b = \frac{3}{2}a$ を変形すると $a = \frac{2}{3}b$ であるから、これと $\textcircled{8}$ より

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} &\leq \frac{2}{3}b \leq 4 \\ \Leftrightarrow -\frac{9}{4} &\leq b \leq 6 \quad \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1]、[2] より、 $3 < \sqrt{10} < \frac{7}{2}$ に注意すると、 a のとり得る値の範囲は、 $\textcircled{7}$ 、 $\textcircled{8}$ より

$$-\frac{3}{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{10}$$

となる。また、 $b=0$ は $\textcircled{9}$ に含まれるから、 b のとり得る値の範囲は

$$-\frac{9}{4} \leq b \leq 6$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{3}{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{10}, -\frac{9}{4} \leq b \leq 6$$

(3)

(2) と同様に b の値で場合分けをして考える。

[1] $b=0$ のとき

このとき、 $3 < \sqrt{10} < 4$ より $-2 < 2 - \sqrt{10} < -1, 5 < 2 + \sqrt{10} < 6$ であるから、 $\textcircled{7}$ を満たす整数 a は $-1 \leq a \leq 5$ の 7 個となる。

[2] $b = \frac{3}{2}a$ のとき

このとき、 a, b がともに整数となるのは a が偶数のときであるから、 $\textcircled{8}$ を満たす整数 a は $a = 0, 2, 4$ の 3 個である。

以上、[1]、[2] より、条件を満たす組 (a, b) の個数は、[1] と [2] で $(a, b) = (0, 0)$ が重複していることを考慮すると

$$7 + 3 - 1 = 9 (\text{個})$$

となる。

(答) 9 個

〔Ⅱ〕

(1)

玉を2回取り出し終えたとき、Pが原点にあるためには、2回の操作で青玉と白玉を1回ずつ取り出す、もしくは赤玉と黒玉を1回ずつ取り出せばよく、この組み合わせとなる玉の取り出し方は合わせて4通りである。玉の取り出し方の総数は 4^2 通りであり、これらは同様に確からしいため、求める確率は

$$\frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

青玉、白玉、黒玉、赤玉の取り出す回数をそれぞれ a 回、 b 回、 c 回、 d 回(a, b, c, d は0以上の整数)とする。玉を3回取り出し終えたとき、Pが点 $(1, 0)$ にあるための条件は

$$\begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b+c+d=3 \end{cases}$$

が成立することである。ここで、 $c(=d)$ の値で場合分けして考える。

[1] $c=d=0$ のとき

このとき、 $(a, b, c, d)=(2, 1, 0, 0)$ であり、この組み合わせとなる玉の取り出し方は

$${}_3C_1=3(\text{通り})$$

である。

[2] $c=d=1$ のとき

このとき、 $(a, b, c, d)=(1, 0, 1, 1)$ であり、この組み合わせとなる玉の取り出し方は

$$3!=6(\text{通り})$$

である。

[3] $c(=d)$ が2以上のとき

このとき、 $a+b+c+d=3$ を満たす組み合わせは存在せず、これは不適である。

以上、[1], [2], [3]より、求める確率は、玉の取り出し方の総数が 4^3 通りであることから

$$\frac{3+6}{4^3} = \frac{9}{64}$$

となる。

(答) $\frac{9}{64}$

(3)

玉を4回取り出し終えたとき、Pが点 $(1, 1)$ にあるための条件は

$$\begin{cases} a-b=1 \\ c-d=1 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$$

が成立することである。ここで、 $0 \leq a \leq 4$ と $a-b=1$ に着目して (a, b) の値で場合分けをして考える。

[1] $(a, b)=(1, 0)$ のとき

このとき、 $(a, b, c, d)=(1, 0, 2, 1)$ であり、この組み合わせとなる玉の取り出し方は

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1=12(\text{通り})$$

である。

[2] $(a, b)=(2, 1)$ のとき

このとき、 $(a, b, c, d)=(2, 1, 1, 0)$ であり、この組み合わせとなる玉の取り出し方は

$${}_4C_1 \cdot {}_3C_1=12(\text{通り})$$

である。

[3] $(a, b)=(3, 2), (4, 3)$ のとき

このとき、 $a+b+c+d=4$ を満たす組み合わせは存在せず、これは不適である。

以上、[1], [2], [3]より、求める確率は、玉の取り出し方の総数が 4^4 通りであることから

$$\frac{12+12}{4^4} = \frac{3}{32}$$

となる。

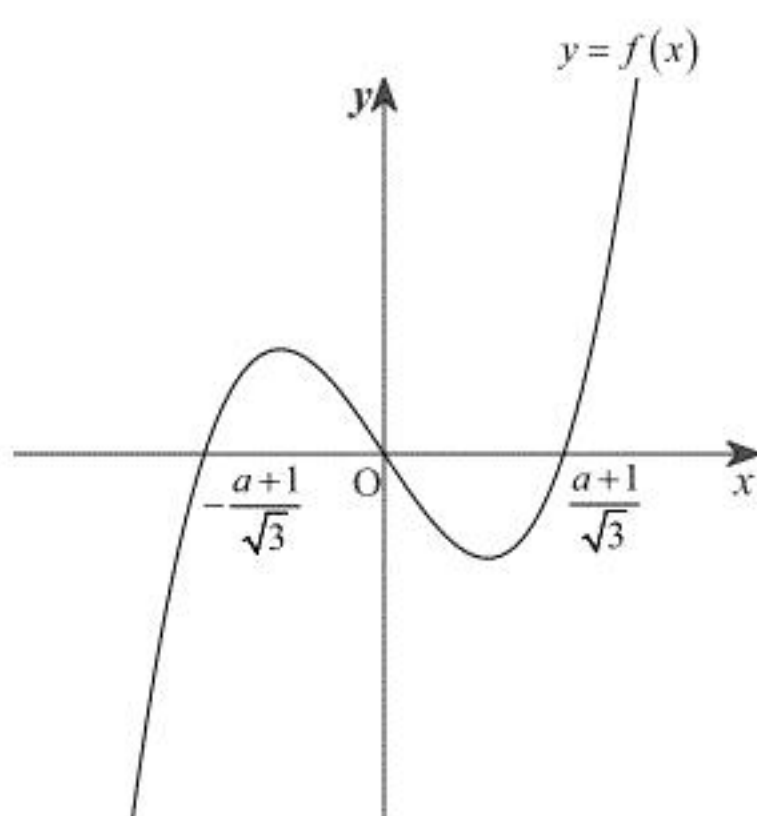
(答) $\frac{3}{32}$

〔Ⅲ〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - (a+1)^2 x \\ &= 3x \left(x + \frac{a+1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{a+1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

より、 $f(x)=0$ の実数解は $x=0, \pm \frac{a+1}{\sqrt{3}}$ であるから、 $y=f(x)$ のグラフは以下のような
る。



ゆえに、 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれたすべての面積の和を $S(a)$ とおくと、 $f(x)$ は奇関数であることを用いて、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\frac{a+1}{\sqrt{3}}}^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}} |f(x)| dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}} \{-f(x)\} dx \\ &= -2 \left[\frac{3}{4} x^4 - \frac{(a+1)^2}{2} x^2 \right]_0^{\frac{a+1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{(a+1)^4}{6} \end{aligned}$$

となる。問題文より $S(a)=\frac{27}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{27}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(a+1)^4}{6} &= \frac{27}{2} \\ \Leftrightarrow (a+1)^4 &= 81 \\ \Leftrightarrow a+1 &= \pm 3 \\ \Leftrightarrow a &= -4, 2 \end{aligned}$$

となる。これと $a>0$ より、求める a の値は $a=2$ である。

(答) $a=2$

(2)

$$f'(x) = 9x^2 - (a+1)^2 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - (a+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{a+1}{3} \end{aligned}$$

であるから、(1)の $y=f(x)$ のグラフより $p=-\frac{a+1}{3}$ となる。ここで、

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a+1}{3} \\ \Leftrightarrow a &= -3p-1 \end{aligned}$$

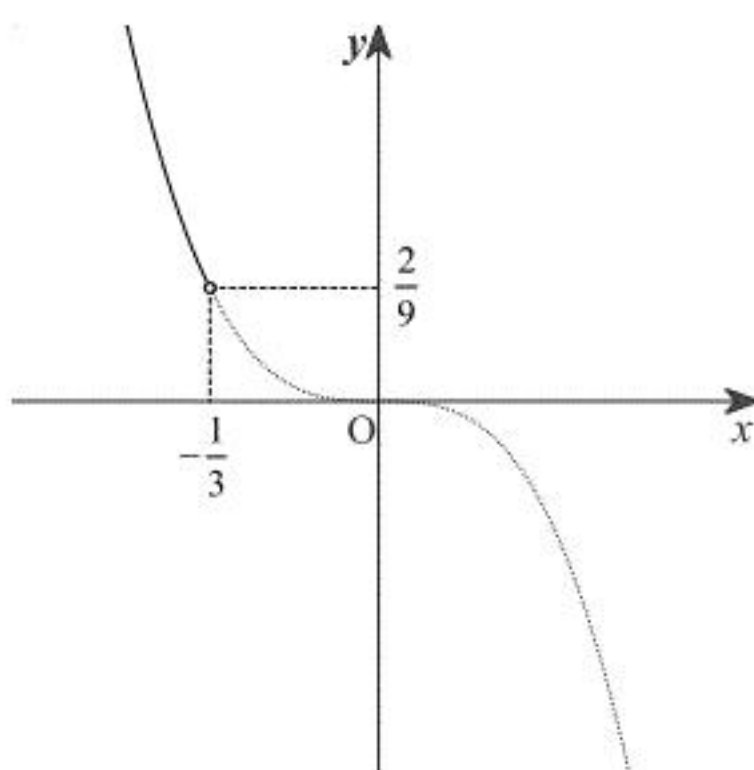
であり、 a は正の実数全体を動くから

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ \Leftrightarrow -3p-1 &> 0 \\ \Leftrightarrow p &< -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f(p) &= 3p^3 - (a+1)^2 p \\ &= 3p^3 - (-3p-1+1)^2 p \\ &= -6p^3 \end{aligned}$$

であるから、求める軌跡は $y=-6x^3 \left(x < -\frac{1}{3} \right)$ となり、これを図示すると次図の実線部分となる。ただし、端点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{9} \right)$ は含まない。



(答) 前図