

〔 I 〕

(1)

半径 a の球の表面積は

$$S(a) = 4\pi a^2$$

である。これを微分して

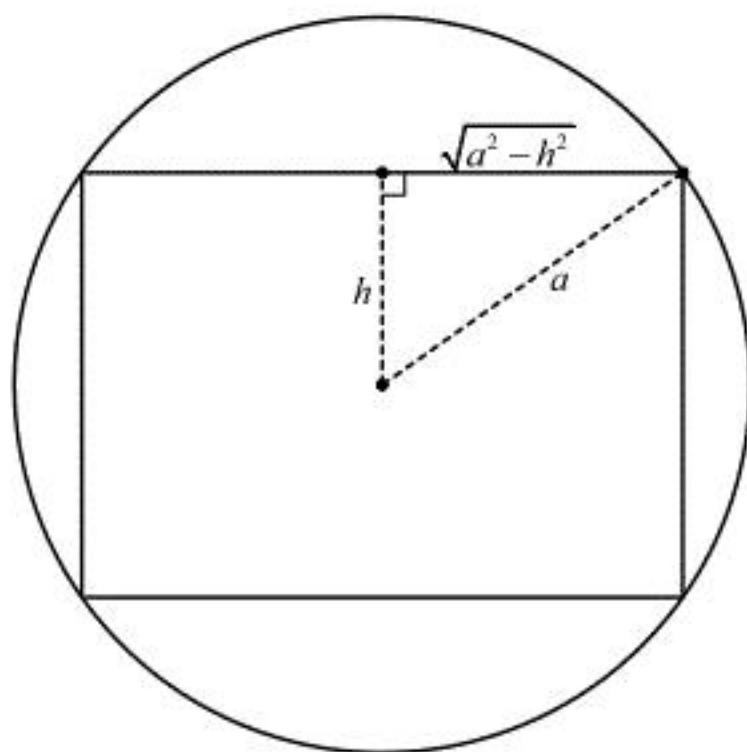
$$S'(a) = 8\pi a$$

となる。

(答) $S(a) = 4\pi a^2$, $S'(a) = 8\pi a$

(2)

直円柱の中心軸を通る断面は下図のようになる。



よって、直円柱の底面の半径は $\sqrt{a^2 - h^2}$ となるから、直円柱の体積は

$$2h \cdot \pi \left(\sqrt{a^2 - h^2} \right)^2 = 2\pi h (a^2 - h^2)$$

である。

(答) $2\pi h (a^2 - h^2)$

(3)

$a = 3$ のとき、 h の取りうる値の範囲は $0 < h < 3$ となる。また、(2)の答に $a = 3$ を代入して

$$\begin{aligned} V(h) &= 2\pi h (9 - h^2) \\ &= -2\pi (h^3 - 9h) \end{aligned}$$

となる。これを微分して

$$\begin{aligned} V'(h) &= -2\pi (3h^2 - 9) \\ &= -6\pi (h - \sqrt{3})(h + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

を得る。よって、増減表は $0 < h < 3$ の範囲で

h	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$			極大		

のようになる。したがって、 $h = \sqrt{3}$ のとき $V(h)$ は最大値 $V(\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}\pi$ をとる。また、こ

のときの直円柱の高さ $2h$ は $2\sqrt{3}$ である。

(答) 増減表：(前表), $V(h)$ の最大値： $12\sqrt{3}\pi$, 直円柱の高さ： $2\sqrt{3}$

〔Ⅱ〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ は等差数列より、公差 d を用いて $a_n = a_1 + (n-1)d$ と表せる。条件より

$$\begin{aligned} a_{10} + a_{11} + a_{12} &= 6 \\ \Leftrightarrow (a_1 + 9d) + (a_1 + 10d) + (a_1 + 11d) &= 6 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 2 - 10d \end{aligned}$$

である。したがって

$$a_{10} = 2 - d, a_{11} = 2, a_{12} = 2 + d$$

である。 a_{10}, a_{11}, a_{12} の積が 0 であることから、このうち少なくとも一つは 0 である。これと $a_{10} < a_{11} < a_{12}$, $a_{11} = 2$ より、 $a_{10} = 0$ である。したがって $d = 2$ である。以上より

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= (2 - 10d) + (n-1)d \\ &= 2n - 20 \end{aligned}$$

である。また、数列 $\{b_n\}$ の階差数列が数列 $\{a_n\}$ であることから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 20) \\ &= b_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 20(n-1) \\ &= b_1 + n^2 - 21n + 20 \end{aligned}$$

であり、これは $n = 1$ でも成立する。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2n - 20, b_n = b_1 + n^2 - 21n + 20$$

(2)

a_n は n について単調増加し、 $a_{10} = 0$ であるから $a_n \leq 0$ を満たす n の最大値は $m = 10$ である。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m b_k &= \sum_{k=1}^{10} (b_1 + k^2 - 21k + 20) \\ &= 10b_1 + \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot (10+1) \cdot (2 \cdot 10 + 1) - 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 20 \cdot 10 \\ &= 10b_1 - 570 \end{aligned}$$

となる。これが -570 となるのは $b_1 = 0$ のときである。

$$(\text{答}) \quad b_1 = 0$$

(3)

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + n^2 - 21n + 20 \\ &= b_1 + \left(n - \frac{21}{2}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2 + 20 \end{aligned}$$

であるから、 b_n は $n = 10, 11$ のときに最小値 $b_{10} = b_{11} = b_1 - 90$ をとる。すべての自然数 n に対して $b_n \geq 0$ となるためには、 $b_1 - 90 \geq 0$ すなわち $b_1 \geq 90$ でなければならない。したがって、条件を満たす b_1 の最小値は 90 である。

$$(\text{答}) \quad b_1 = 90$$

〔Ⅲ〕

(1)

円 S の方程式は $(x-2a)^2 + y^2 = a^2$ である。これが点 $M(2, 1)$ を通ることから

$$\begin{aligned}(2-2a)^2 + 1^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 8a + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3a-5)(a-1) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{5}{3} \quad (\because a > 1)\end{aligned}$$

を得る。したがって、円 S の方程式は $\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{9}$ である。また、点 $D(p, q) (q > 0)$ とおくと、これを通る接線の方程式は

$$\left(p - \frac{10}{3}\right)\left(x - \frac{10}{3}\right) + qy = \frac{25}{9}$$

と表せる。これが原点を通ることから

$$\begin{aligned}\left(p - \frac{10}{3}\right) \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) &= \frac{25}{9} \\ \therefore p &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。また、点 D は円 S 上の点だから

$$\left(p - \frac{10}{3}\right)^2 + q^2 = \frac{25}{9}$$

も成立する。よって、 $p = \frac{5}{2}$ を代入して

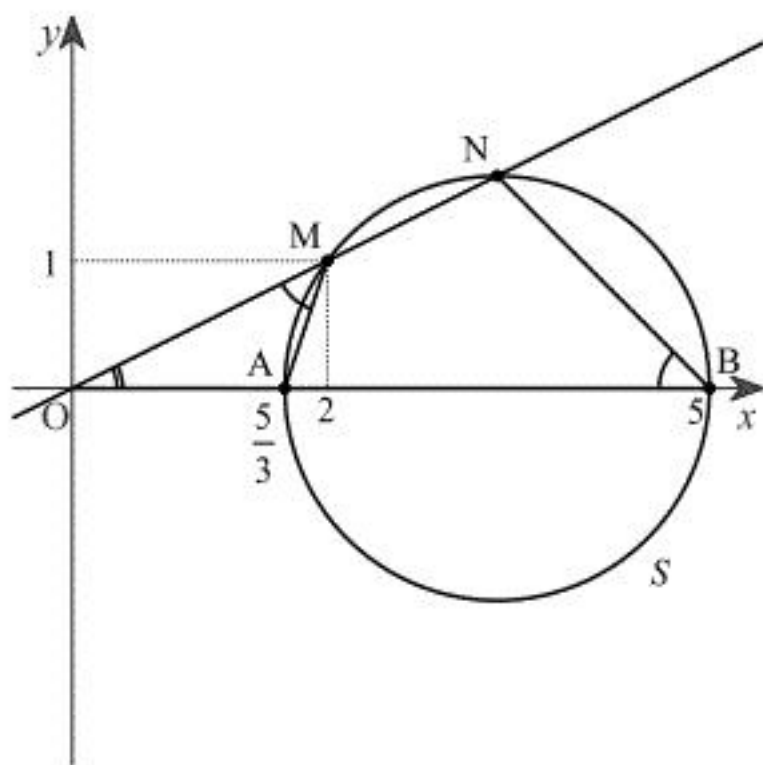
$$q = \frac{5\sqrt{3}}{6} \quad (\because 0 < q)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{5}{3}, D = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$$

(2)

円 S と点 A, B, M, N を図示すると以下のようになる。



$\triangle OBN$ と $\triangle OMA$ は $\angle AOM$ を共有し、 $\angle OBN = \angle OMA$ であるから相似である。相似比は

$$OB : OM = 5 : \sqrt{2^2 + 1^2} = 5 : \sqrt{5} = \sqrt{5} : 1$$

である。したがって、面積比は $(\sqrt{5})^2 : 1^2 = 5 : 1$ となる。

(答) 5

(3)

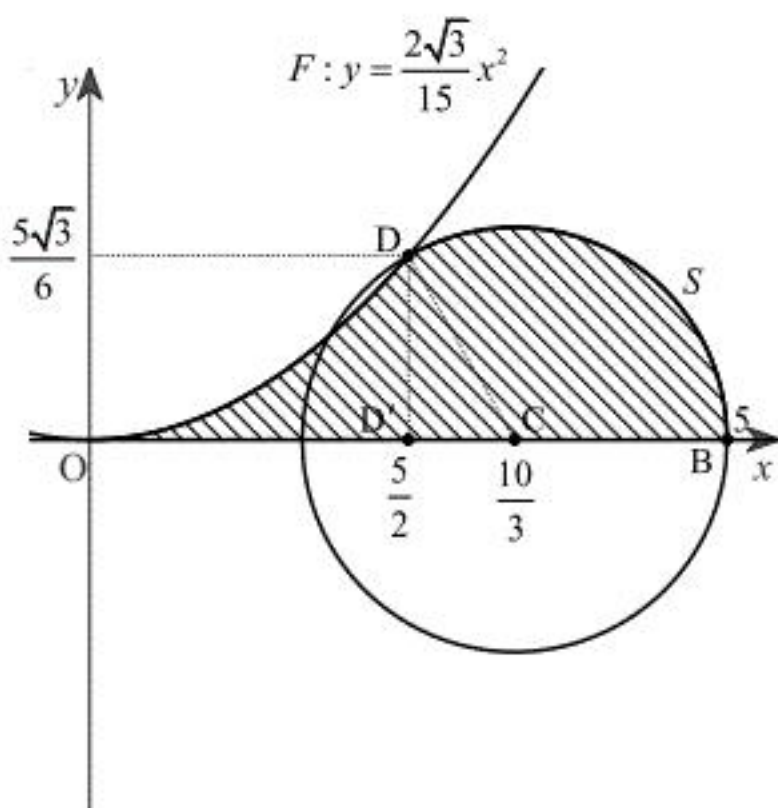
$y = kx^2$ は点 $D\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$ を通ることから

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{3}}{6} &= k \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ \therefore k &= \frac{2\sqrt{3}}{15}\end{aligned}$$

を得る。ここで、点 D における円 S の接線とグラフ F は点 D と原点において交わり、

$0 < x < \frac{5}{2}$ において後者は前者の下側にあることから、円 S とグラフ F は $0 < x < \frac{5}{2}$ において

共有点を持つ。よって、円 S とグラフ F を図示すると以下のようになり、求める面積は斜線部となる。



点 D から x 軸におろした垂線の足を点 D' とする。求める面積を、[1] x 軸と F 、直線 DD' で囲まれる領域、[2] 直角三角形 $DD'C$ 、[3] 扇形 $C-BD$ に分けて計算する。

[1] x 軸と F 、直線 DD' で囲まれる領域

$$\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2\sqrt{3}}{15} x^2 dx = \frac{2\sqrt{3}}{15} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{5}{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{36}$$

となる。

[2] 直角三角形 $DD'C$

$$\frac{1}{2} \cdot DD' \cdot D'C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{10}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{25\sqrt{3}}{72}$$

となる。

[3] 扇形 $C-BD$

$$\cos \angle DCD' = \frac{DD'}{D'C} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2}$$

より $\angle DCD' = \frac{\pi}{3}$ 、 $\angle DCB = \frac{2\pi}{3}$ である。したがって扇形 $C-BD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{25}{27} \pi$$

となる。

以上[1]、[2]、[3]より、求める面積は

$$\frac{25\sqrt{3}}{36} + \frac{25\sqrt{3}}{72} + \frac{25}{27} \pi = \frac{25\sqrt{3}}{24} + \frac{25}{27} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2\sqrt{3}}{15}, \text{面積} : \frac{25\sqrt{3}}{24} + \frac{25}{27} \pi$$