

1

(1)

$2^x = t$ とおくと、 x が正のとき $t > 1$ である。また、問題の方程式に代入すると

$$t^2 - 4t + a^2 - 3a + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この方程式が $t > 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つことは、問題の方程式が異なる 2 つの正の実数解をもつことの必要十分条件である。まず、2 次方程式 $\textcircled{1}$ が異なる 2 つの実数解を持つので、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 4 - (a^2 - 3a + 4) &> 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 3a &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a &< 0 \\ \Leftrightarrow a(a - 3) &< 0 \\ \therefore 0 < a &< 3 \end{aligned}$$

となる。このもとで、2 次方程式 $\textcircled{1}$ が異なる 2 つの実数解を $t = \alpha, \beta$ とすると、 α, β がともに 1 より大きいための必要十分条件は、

$$\begin{cases} (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \\ (\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0 \end{cases}$$

である。ここで、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = a^2 - 3a + 4$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) + (\beta - 1) &= (\alpha + \beta) - 2 \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $(\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$ はつねに成り立つ。また、

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)(\beta - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 3a + 4) - 4 + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 &> 0 \\ \therefore a < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < a \end{aligned}$$

である。 $2 < \sqrt{5} < 3$ より、

$$\begin{aligned} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} &> 0 \\ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} &< \frac{3 + 3}{2} = 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、求める a の範囲は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 < a < 3 \\ a < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < a \end{cases} \\ \Leftrightarrow 0 < a &< \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < a < 3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 < a < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < a < 3$$

(2)(a)

b_n の定義より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 4 \\ &= \frac{2a_n + 4}{a_n + 5} + 4 \\ &= \frac{6a_n + 24}{a_n + 5} \\ &= \frac{6(a_n + 4)}{(a_n + 4) + 1} \\ &= \frac{6b_n}{b_n + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = \frac{6b_n}{b_n + 1}$$

(b)

$a_1 = 2$ であることと、 a_n の漸化式から、全ての自然数 n について $a_n > 0$ であることが分かる。よって、 $b_n = a_n + 4$ より、全ての自然数 n について $b_n > 0$ である。したがって、(a) で得た漸化式の両辺は 0 でないから、両辺の逆数を取ることができる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{b_n} + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

を得る。また、 $b_1 = 6$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{5} &= \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} - \frac{1}{5} &= \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \cdot \frac{-1}{30} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} - \frac{1}{5} &= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{b_n} &= \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} \\ \therefore b_n &= \frac{5 \cdot 6^n}{6^n - 1} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - 4 \\ &= \frac{5 \cdot 6^n}{6^n - 1} - 4 \\ &= \frac{5 \cdot 6^n - 4(6^n - 1)}{6^n - 1} \\ &= \frac{6^n + 4}{6^n - 1} \end{aligned}$$

となる。

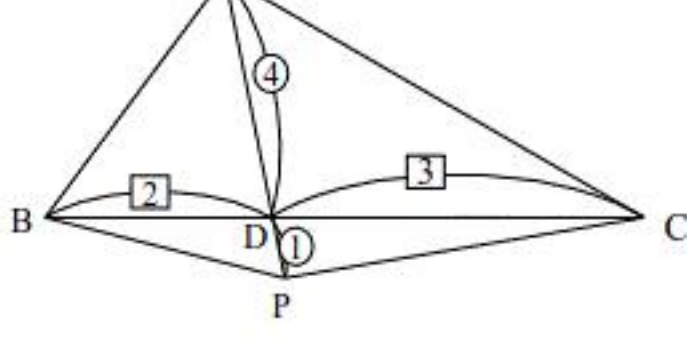
$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{6^n + 4}{6^n - 1}$$

(3)

問題の等式を変形すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{5}{4} \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \right) \end{aligned}$$

とかける。よって、直線 AP と線分 BC の交点を D とすると、 $BD:DC = 2:3$ 、 $AD:AP = 4:5$ であることが分かる。



よって、

$$\triangle PAB = \frac{AP}{AD} \cdot \triangle DAB = \frac{AP}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \triangle ABC = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

(4)(a)

全ての手の出し方は

$$3^4 = 81 \quad (\text{通り})$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。また、勝つ人の選び方は

$${}_4C_2 = 6 \quad (\text{通り})$$

である。勝つ人の手の出し方は 3 通りであるから、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 3}{3^4} = \frac{2}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{9}$$

(b)

まず、4 人でじゃんけんをして、勝負がつく場合を考える。4 人のうち k 人が勝つのは、(a) の過程と同様に考えると

$${}_4C_k \cdot 3 \quad (\text{通り})$$

である。 $k = 1, 2, 3$ であるから、勝負がつく手の出し方は

$${}_4C_1 \cdot 3 + {}_4C_2 \cdot 3 + {}_4C_3 \cdot 3 = 42 \quad (\text{通り})$$

である。よって、余事象を考えると、求める確率は

$$1 - \frac{42}{81} = \frac{13}{27}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{27}$$

(c)

全ての手の出し方は

$$3^n \quad (\text{通り})$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。(b) の過程と同様に考えると、勝負がつく手の出し方は

$${}_nC_1 \cdot 3 + {}_nC_2 \cdot 3 + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot 3 \quad (\text{通り})$$

である。ここで、

$$2^n = (1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n$$

という式から、

$$\begin{aligned} {}_nC_1 \cdot 3 + {}_nC_2 \cdot 3 + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot 3 &= 3(2^n - {}_nC_0 - {}_nC_n) \\ &= 3(2^n - 2) \end{aligned}$$

を得る。よって、余事象を考えると、求める確率は

$$1 - \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$$

2

(1)

点 A, C, E, G, I を通る円の中心を点 O とする。仮定より, 点 A, C, E, G, I はすべて円 O 上にあり, $AE=IC$ であるから,

$$\begin{aligned} & \text{弧 } AE = \text{弧 } IC \\ & \Leftrightarrow \angle AOE = \angle IOC \\ & \Leftrightarrow \angle AOC + \angle COE = \angle IOA + \angle AOC \\ & \Leftrightarrow \angle COE = \angle IOA \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にして,

$$\angle AOC = \angle COE = \angle EOG = \angle GOI = \angle IOA$$

が成り立つので, 五角形 ACEGI は正五角形である。また,

$$\angle AOC + \angle COE + \angle EOG + \angle GOI + \angle IOA = 360^\circ$$

より,

$$\angle AOC = \angle COE = \angle EOG = \angle GOI = \angle IOA = 72^\circ$$

である。したがって, 円周角の定理から,

$$\begin{aligned} \angle BAJ &= \frac{1}{2} \angle EOG = 36^\circ \\ \angle BCD &= \frac{1}{2} \angle IOG = 36^\circ \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\angle BAJ = \angle BCD \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が分かる。また, 円周角の定理より,

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \frac{1}{2} \angle COE = 36^\circ \\ \angle ACB &= \frac{1}{2} \angle IOA = 36^\circ \end{aligned}$$

が成り立つので, $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。したがって,

$$AB = CB \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。また, 対頂角より,

$$\angle ABJ = \angle CBD \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。以上より, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から, 1 組の辺とその両端の角が等しいので,

$$\triangle ABJ \equiv \triangle CBD$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$AD=x$ とおく。円周角の定理より,

$$\angle GCI = \angle GEI$$

が成り立つ。よって, (1) より,

$$\angle EAG = \angle GCI$$

であるから,

$$\begin{aligned} \angle EAG &= \angle GEI \\ \Leftrightarrow \angle EAG &= \angle GEH \end{aligned}$$

が成り立つ。また, 共通の角であるから

$$\angle AGE = \angle EGH$$

である。よって, 2 角が等しいので $\triangle AEG \sim \triangle EGH$ が成り立つ。また, $AE=AG$ であるので $\triangle AEG$ は二等辺三角形である。よって, $\triangle EGH$ も二等辺三角形であり,

$$EG = EH$$

が成り立つ。また, (1) の結果と対称性より,

$$\triangle ABJ \equiv \triangle IHJ \equiv \triangle EFD$$

が成り立つから,

$$EG = EH = EI - IH = AE - DE = AD = x$$

となる。また, 同様にして, $\triangle GFH \equiv \triangle EDF$ より,

$$GH = ED = AE - x = 1 - x$$

である。以上から,

$$\begin{aligned} AE : EG &= EG : GH \\ \Leftrightarrow 1 : x &= x : (1 - x) \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad AD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(3)

$\triangle AEG$ は $AE=AG$ の二等辺三角形であり, $\angle EAG = \angle BAJ = 36^\circ$ であるから,

$$\begin{aligned} \angle AEG &= \frac{1}{2} (180^\circ - 36^\circ) \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

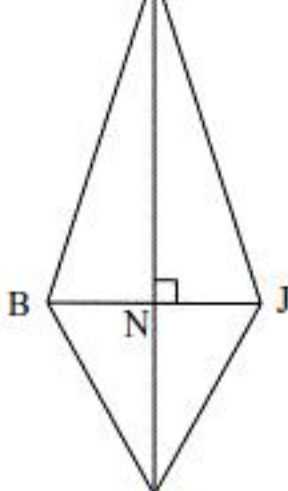
である。辺 EG の中点を M とすると,

$$\begin{aligned} x = EG &= 2EM = 2AE \cos 72^\circ = 2 \cos 72^\circ \\ \therefore \cos 72^\circ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \end{aligned}$$

を得る。ここから, $\sin 72^\circ > 0$ より,

$$\sin 72^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

を得る。また, 五芒星は四角形 ABOJ と合同な四角形 5 つに分けることができる。よって, この四角形の面積を求めればよい。また, BJ の中点を N とおく。 $\triangle ABJ$ が二等辺三角形であることから, $\angle ANJ = 90^\circ$ である。



よって, 四角形 ABOJ の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot BJ$$

であり, 五芒星の面積は,

$$5 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot BJ$$

である。(2) の結果から,

$$BJ = CI - 2CB = 1 - 2(CI - BI) = 1 - 2(1 - x) = 2x - 1 = \sqrt{5} - 2$$

である。また, OA は $\triangle AEG$ の外接円の半径であるから, $\triangle AEG$ に正弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} 2OA &= \frac{AG}{\sin 72^\circ} \\ \Leftrightarrow OA &= \frac{1}{2 \sin 72^\circ} \end{aligned}$$

となる。以上より, 五芒星の面積は

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \right) \cdot (\sqrt{5} - 2) &= \frac{5(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{5(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \\ &= \frac{5(\sqrt{5} - 2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(4)

五角錐の頂点 A から, 底面 BDFHJ に下ろした垂線の足は, 対称性から点 O である。まず, AN の長さを求める。

$$AB = DE = 1 - x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} AN &= AB \sin 72^\circ \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 72^\circ \end{aligned}$$

である。また, これより

$$ON = OA - AN = \frac{1}{2 \sin 72^\circ} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 72^\circ$$

である。五角形 BDFHJ は $\triangle OBJ$ と合同な図形 5 つに分けることができるから, 五角形 BDFHJ の面積は

$$\begin{aligned} 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot BJ \cdot ON &= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 2) \left(\frac{1}{2 \sin 72^\circ} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 72^\circ \right) \\ &= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 2) \cdot \sin 72^\circ \cdot \left(\frac{1}{2 \sin^2 72^\circ} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 2) \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \left(\frac{4}{5 + \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 2) \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16} \cdot (25 - 11\sqrt{5}) \end{aligned}$$

となる。また, $\triangle OAN$ に三平方の定理を用いて, 五角錐の高さは

$$\begin{aligned} \sqrt{AN^2 - ON^2} &= \sqrt{AN^2 - (OA - AN)^2} \\ &= \sqrt{2OA \cdot AN - OA^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2 \sin 72^\circ} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \sin 72^\circ - \left(\frac{1}{2 \sin 72^\circ} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4 \sin^2 72^\circ}} \\ &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{5 + \sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{2(5 - \sqrt{5})}{20}} \\ &= \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \end{aligned}$$

である。以上より, 求める体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{16} \cdot (25 - 11\sqrt{5}) \cdot \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} &= \frac{1}{48\sqrt{5}} \cdot \sqrt{30 - 10\sqrt{5}} \cdot (25 - 11\sqrt{5}) \\ &= \frac{25 - 11\sqrt{5}}{48\sqrt{5}} \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{25 - 11\sqrt{5}}{48\sqrt{5}} \cdot (5 - \sqrt{5}) \\ &= \frac{9\sqrt{5} - 20}{12} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{9\sqrt{5} - 20}{12}$$

3

(1)

対数の性質より

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \log(x + \sqrt{x^2 + a}) + \log(-x + \sqrt{x^2 + a}) \\ &= \log\left\{\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\left(-x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right\} \\ &= \log a \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $f(x) + f(-x) = \log a$

(2)

$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ である。よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

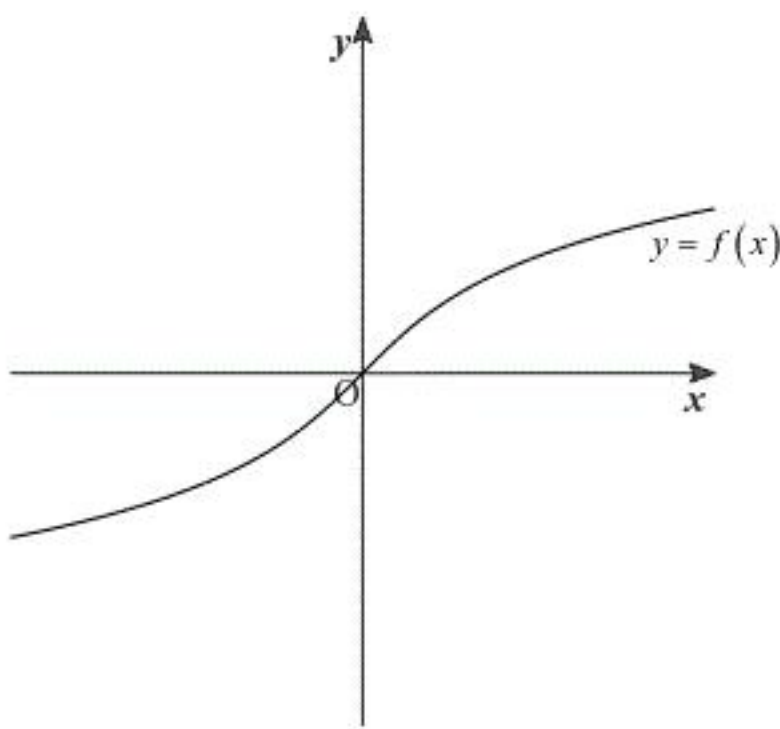
である。また、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left\{ (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\}' \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

である。以上より、常に $f'(x) > 0$ であり、また、 $x=0$ でのみ $f''(x)=0$ となる。したがって、 $f(x)$ の増減表の増減表は次のようになる。

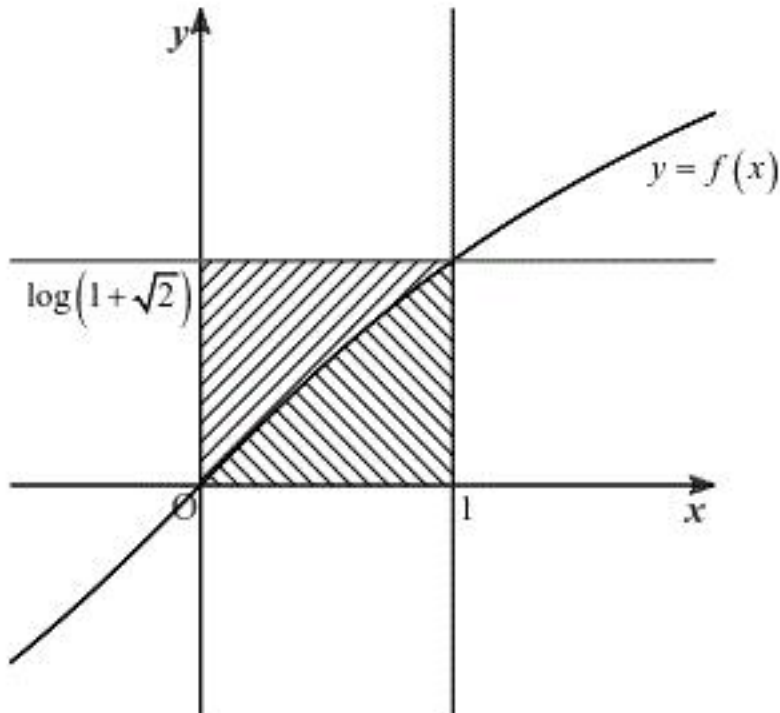
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	1	+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	変曲点	$\searrow$

すなわち、関数 $y=f(x)$ は単調に増加し、極値は持たない。また、 $x \leq 0$ で下に凸であり、 $x \geq 0$ で上に凸である。そして、 $f(0)=0$ であるから、変曲点は $(0, 0)$ で、 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(3)



上の図のように斜線部を2つ作ると、 V_1 は下側の斜線部を x 軸を中心に回転して得られる回転体の体積であり、 V_2 上側の斜線部を y 軸を中心に回転して得られる回転体の体積である。

よって、 $b=f(1)=\log(1+\sqrt{2})$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_0^1 (x)' \{f(x)\}^2 dx \\ &= \left[x \{f(x)\}^2 \right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot 2f(x)f'(x) dx \\ &= \{f(1)\}^2 - 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} f(x) dx \\ &= b^2 - 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} f(x) dx \end{aligned}$$

となり、 $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ より、さらに

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= b^2 - 2 \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})' f(x) dx \\ &= b^2 - 2 \left[\sqrt{x^2 + 1} f(x) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} f'(x) dx \\ &= b^2 - 2\sqrt{2}f(1) + 2 \int_0^1 dx \quad (\because f(0)=0) \\ &= b^2 - 2\sqrt{2}b + 2 \\ &= (b - \sqrt{2})^2 \\ &= \left\{ \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \right\}^2 \end{aligned}$$

となる。また、 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ を x について解くと

$$\begin{aligned} y &= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} &= e^y \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} &= e^y - x \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 &= e^{2y} - 2xe^y + x^2 \\ \Leftrightarrow 2xe^y &= e^{2y} - 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \int_0^b x^2 dy \\ &= \int_0^b \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} dy \\ &= \left[\frac{e^{2y}}{8} - \frac{e^{-2y}}{8} - \frac{1}{2}y \right]_0^b \\ &= \frac{e^{2b}}{8} - \frac{e^{-2b}}{8} - \frac{1}{2}b \end{aligned}$$

となる。 $b=f(1)=\log(1+\sqrt{2})$ より、 $e^b=1+\sqrt{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{\pi} &= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{8} - \frac{1}{8(1+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{8} - \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8} - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left\{ \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} \right\}^2}{\frac{\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})}{2}} = 2 \left\{ \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \right\}$$

である。

(答) $\frac{V_1}{V_2} = 2 \left\{ \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2}) \right\}$