

1

(1)(a)

$y = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ について、

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k \quad (\because 0! = 1, x^0 = 1)$$

であるから、 $y = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

である。

(答) $y' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k$

(b)

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ と $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k$ について、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k &= \frac{1}{0!} x^0 + \frac{1}{1!} x^1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{1}{n!} x^n \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k &= \frac{1}{0!} x^0 + \frac{1}{1!} x^1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$x^n = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k \right)$$

である。これを与式に代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^n}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k} dx &= \int_0^1 \frac{n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k \right)}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k} dx \\ &= n! \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k \right)'}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k} \right\} dx \quad (\because (1)) \\ &= n! \left[x - \log \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right) \right]_0^1 \\ &= n! \left\{ 1 - \log \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \right\} \quad (\because 0^0 = 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k} dx = n! \left\{ 1 - \log \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) \right\}$

(2)

$t = \cos \theta$ とおくと、 t の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ において $-1 \leq t \leq 1$ であり、
 $\sin^2 \theta + 2k \cos \theta + k - 2 < 0$ は、 t を用いて表すと

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2k \cos \theta + k - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \cos^2 \theta) + 2k \cos \theta + k - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow -t^2 + 2kt + k - 1 &< 0 \end{aligned}$$

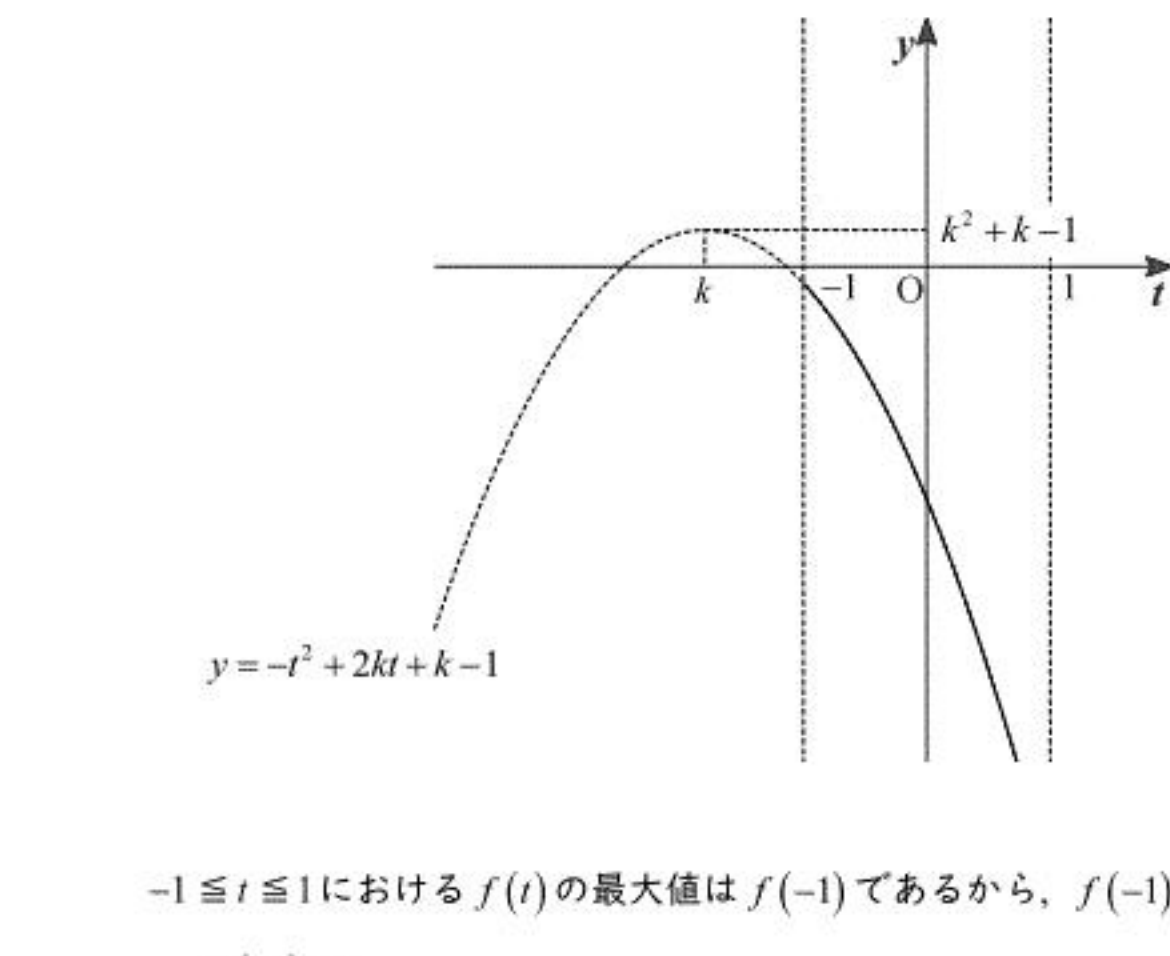
である。このとき $f(t) = -t^2 + 2kt + k - 1$ とすると、 $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ のどんな値に対しても不等式 $\sin^2 \theta + 2k \cos \theta + k - 2 < 0$ が成り立つような k の範囲は、 $-1 \leq t \leq 1$ において常に $f(t) < 0$ が成立するような k の範囲に等しい。ここで

$$-t^2 + 2kt + k - 1 = -(t-k)^2 + k^2 + k - 1$$

であるから、 $y = f(t)$ は ty 平面で頂点を $(k, k^2 + k - 1)$ とする上に凸の放物線である。

$-1 \leq t \leq 1$ において $f(t) < 0$ となるのは、 $-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値が 0 よりも小さくなるときであるから、 k と $-1, 1$ の大小関係で場合分けして考える。

[1] $k < -1$ のとき

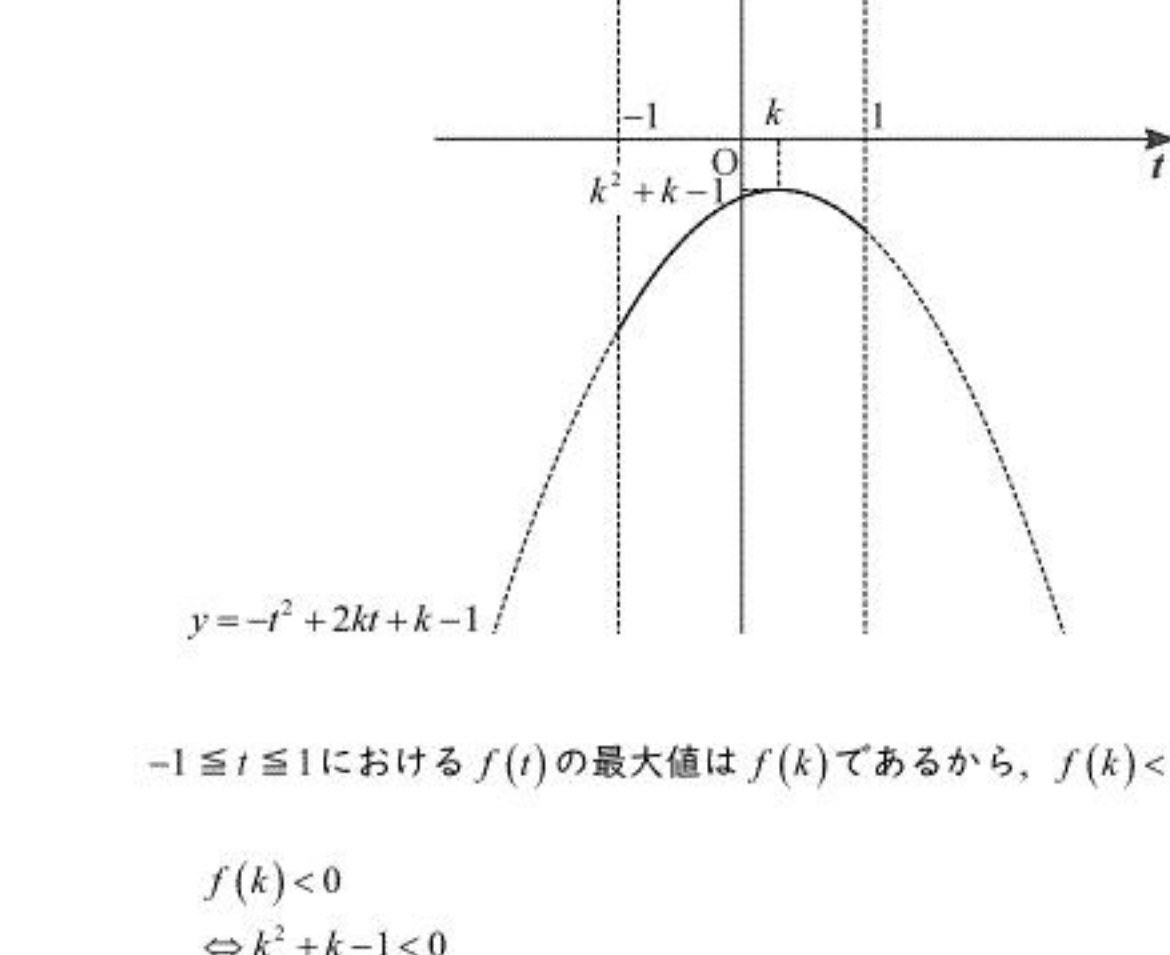


$-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値は $f(-1)$ であるから、 $f(-1) < 0$ を解くと

$$\begin{aligned} f(-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow -k - 2 &< 0 \\ \therefore k &> -2 \end{aligned}$$

となる。これと $k < -1$ より条件を満たす k の範囲は $-2 < k < -1$ である。

[2] $-1 \leq k < 1$ のとき

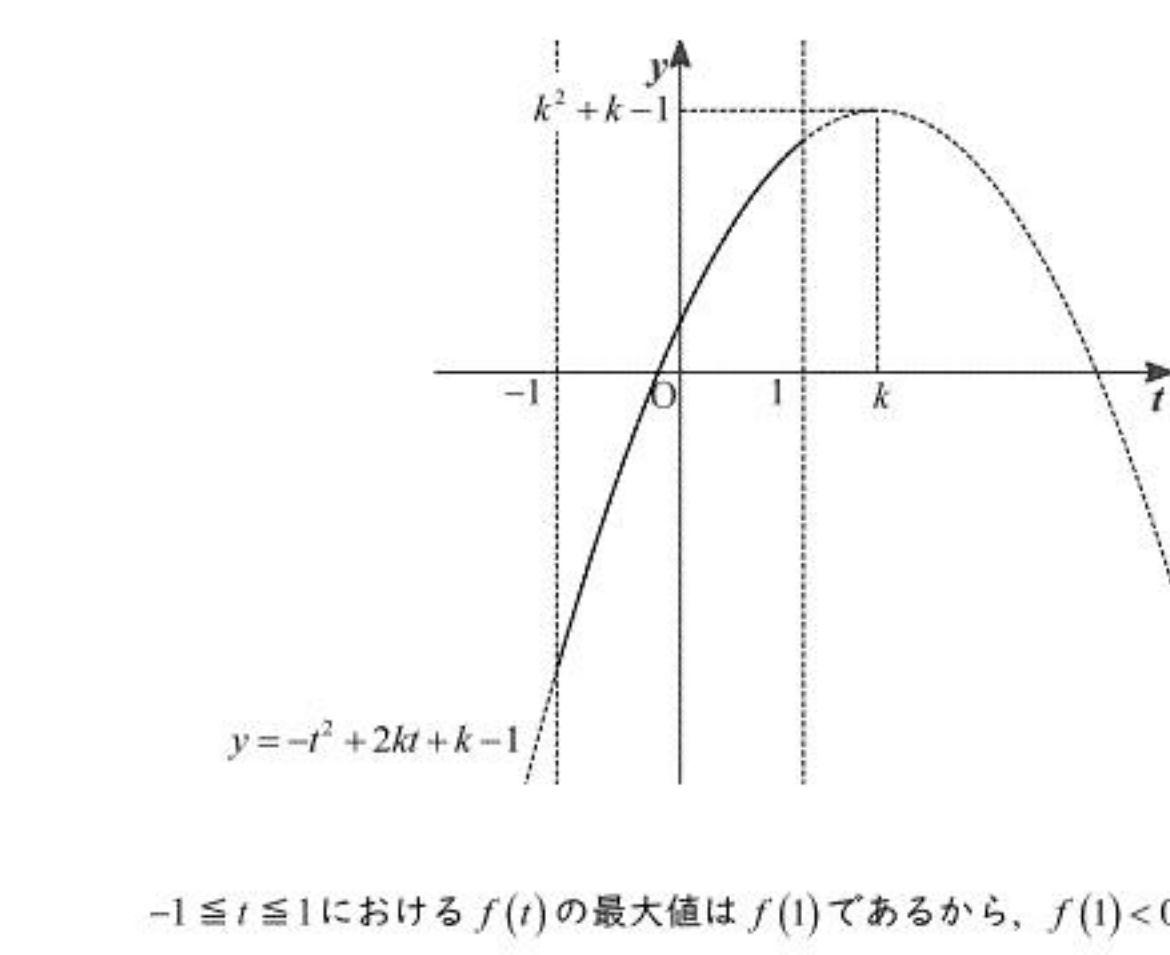


$-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値は $f(k)$ であるから、 $f(k) < 0$ を解くと

$$\begin{aligned} f(k) &< 0 \\ \Leftrightarrow k^2 + k - 1 &< 0 \\ \therefore \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} &< k < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。これと $2 < \sqrt{5} < 3$ 、 $-1 \leq k < 1$ より条件を満たす k の範囲は $-1 \leq k < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

[3] $1 \leq k$ のとき



$-1 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値は $f(1)$ であるから、 $f(1) < 0$ を解くと

$$\begin{aligned} f(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 3k - 2 &< 0 \\ \therefore k &< \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。したがって、 $1 \leq k$ より条件を満たす k は存在しない。

以上、[1], [2], [3]より、条件を満たす k の範囲は $-2 < k < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

(答) $-2 < k < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

(3)(a)

玉も箱もそれぞれ区別ができるとき、4個の玉にそれぞれ6通りの箱の入れ方があるから、求める場合の数は

$$6^4 = 1296$$

である。

(答) 1296通り

(b)

玉も箱もそれぞれが互いに区別できないときの場合の数は、整数4を自然数の和で表す表し方の総数に等しい。4を自然数の和で表すと

$$1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2, 4$$

の5通りあり、高々4個の自然数で表されるので、求める場合の数は5通りである。

(答) 5通り

(c)

玉は互いに区別できるが箱は互いに区別できないとき、(3)(b)の5通りがそれぞれ何通りずつあるか考える。

[1] $1+1+1+1$ のとき

4個の互いに区別できる玉を1個ずつの4つの組に分ける分け方は1通りである。

[2] $1+1+2$ のとき

これは4個の互いに区別できる玉から2個取り出す選び方の総数に等しいから、求める場合の数は

$$\begin{aligned} {}_4C_2 &= \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \\ &= 6 \end{aligned}$$

より、6通りである。

[3] $1+3$ のとき

これは4個の互いに区別できる玉から1個取り出す選び方の総数に等しいから、求める場合の数は

$${}_4C_1 = 4$$

より、4通りである。

[4] $2+2$ のとき

これは4個の互いに区別できる玉を順序を考えずに2個ずつに分ける分け方の総数に等しいから、求める場合の数は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{2!} &= \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{6 \cdot 1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

より、3通りである。

[5] 4 のとき

4個の互いに区別できる玉から4個の玉を取り出す選び方は1通りである。

[1], [2], [3], [4], [5]は互いに排反な事象であるから、以上、[1], [2], [3], [4], [5]より、求める場合の数は

$$1 + 6 + 4 + 3 + 1 = 15$$

である。

(答) 15通り

(d)

6つの箱をそれぞれA, B, C, D, E, Fとし、それぞれの箱に入っている玉の数がAから順に1個、1個、2個、0個、0個、0個である事象を

$$\bigcirc \mid \bigcirc \mid \bigcirc \bigcirc \mid \mid$$

と表すこととする。このとき玉は互いに区別できないが箱は互いに区別できる場合の数は4個の○と5個の|の並べ方の総数に等しい。よって求める場合の数は

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

より、126通りである。

(答) 126通り

(e)

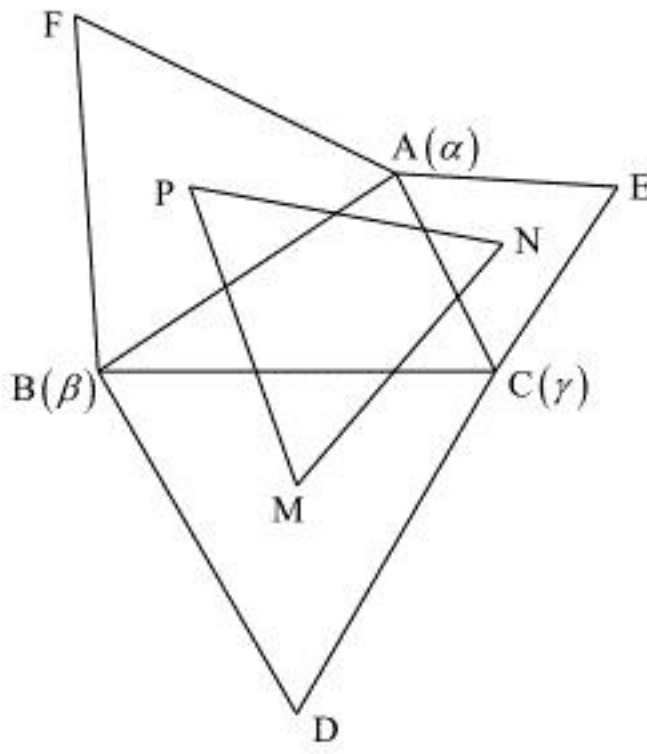
玉は互いに区別できないが箱は互いに区別でき、かつ1つの箱には1つの玉しか入らないとき、玉の入れ方は玉が入る4つの箱を選べばよいから、求める場合の数は

$${}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

より、15通りである。

(答) 15通り

複素数平面において下図のように△ABC並びに各点を定める。



(1)

ある点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点は

$$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) z = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) z$$

と表され、これを ωz と定義することより $\omega = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i)$ である。このとき

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left\{ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} (-2 + 2\sqrt{3}i) \\ &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{3}i) \\ \omega - 1 &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}i) - 1 \\ &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

であるから、確かに $\omega^2 = \omega - 1$ が成立する。

(証明終)

(2)

3点 D, E, F を表す複素数をそれぞれ d, e, f とする。ここで点 D は点 C を中心に点 B を $\frac{\pi}{3}$

だけ回転した点であるから $d = \omega(\beta - \gamma) + \gamma$ である。同様に、点 E は点 A を中心に点 C を $\frac{\pi}{3}$

だけ、点 F は点 B を中心に点 A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから、それぞれの点を表す複素数

e, f は

$$e = \omega(\gamma - \alpha) + \alpha$$

$$f = \omega(\alpha - \beta) + \beta$$

である。これより△DEFの重心を表す複素数は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(d + e + f) &= \frac{1}{3} \{ \omega(\beta - \gamma) + \gamma + \omega(\gamma - \alpha) + \alpha + \omega(\alpha - \beta) + \beta \} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$

(3)

(1), (2)より、 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ に対応する複素数はそれぞれ

$$\begin{aligned} d - \alpha &= \omega(\beta - \gamma) + \gamma - \alpha \\ &= -\alpha + \omega\beta - (\omega - 1)\gamma \\ &= -\alpha + \omega\beta - \omega^2\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e - \beta &= \omega(\gamma - \alpha) + \alpha - \beta \\ &= -(\omega - 1)\alpha - \beta + \omega\gamma \\ &= -\omega^2\alpha - \beta + \omega\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f - \gamma &= \omega(\alpha - \beta) + \beta - \gamma \\ &= \omega\alpha - (\omega - 1)\beta - \gamma \\ &= \omega\alpha - \omega^2\beta - \gamma \end{aligned}$$

である。ここで(1)より $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ であるから、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^3 \\ &= \cos \pi + i \sin \pi \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned} \omega(d - \alpha) &= \omega(-\alpha + \omega\beta - \omega^2\gamma) \\ &= -\omega\alpha + \omega^2\beta - \omega^3\gamma \\ &= -\omega\alpha + \omega^2\beta + \gamma \\ &= -(f - \gamma) \\ \omega^2(d - \alpha) &= \omega^2(-\alpha + \omega\beta - \omega^2\gamma) \\ &= -\omega^2\alpha + \omega^3\beta - \omega^4\gamma \\ &= -\omega^2\alpha - \beta + \omega\gamma \\ &= e - \beta \end{aligned}$$

とできる。これらと $d - \alpha \neq 0$ であることから

$$\left| \frac{f - \gamma}{d - \alpha} \right| = |-\omega| = 1$$

$$\left| \frac{e - \beta}{d - \alpha} \right| = |\omega^2| = 1$$

である。これより $AD = BE = CF$ である。

(証明終)

(4)

3点 M, N, P を表す複素数をそれぞれ m, n, p とする。点 M, N, P はそれぞれ△BCD,

△CAE, △ABFの重心であるから、 $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ を用いて m, n, p は

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3}(\beta + \gamma + d) \\ &= \frac{1}{3}\{\beta + \gamma + \omega(\beta - \gamma) + \gamma\} \\ &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\beta + (2 - \omega)\gamma\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{3}(\gamma + \alpha + e) \\ &= \frac{1}{3}\{\gamma + \alpha + \omega(\gamma - \alpha) + \alpha\} \\ &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\gamma + (2 - \omega)\alpha\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + f) \\ &= \frac{1}{3}\{\alpha + \beta + \omega(\alpha - \beta) + \beta\} \\ &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\alpha + (2 - \omega)\beta\} \end{aligned}$$

とできる。これより $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ に対応する複素数はそれぞれ

$$\begin{aligned} n - m &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\gamma + (2 - \omega)\alpha\} - \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\beta + (2 - \omega)\gamma\} \\ &= \frac{1}{3}\{(2 - \omega)\alpha - (1 + \omega)\beta - (1 - 2\omega)\gamma\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - m &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\alpha + (2 - \omega)\beta\} - \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\beta + (2 - \omega)\gamma\} \\ &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\alpha + (1 - 2\omega)\beta - (2 - \omega)\gamma\} \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \omega(n - m) &= \frac{1}{3}\{\omega(2 - \omega)\alpha - \omega(1 + \omega)\beta - \omega(1 - 2\omega)\gamma\} \\ &= \frac{1}{3}\{(2\omega - \omega^2)\alpha - (\omega + \omega^2)\beta - (\omega - 2\omega^2)\gamma\} \\ &= \frac{1}{3}\{(1 + \omega)\alpha + (1 - 2\omega)\beta - (2 - \omega)\gamma\} \\ &= p - m \end{aligned}$$

であるから、点 P は点 M を中心に点 N を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。よって

$MN = MP$, $\angle NMP = \frac{\pi}{3}$ より△MNPは正三角形である。

(証明終)

(1)

二項定理より $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{n^k}$ である。ここですべての自然数 n と負でない整数 k に対して

$\frac{{}_nC_k}{n^k} > 0$ であるから、 $\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{n^k} \geq \sum_{k=0}^1 \frac{{}_nC_k}{n^k}$ である。また

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^1 \frac{{}_nC_k}{n^k} &= \frac{{}_nC_0}{n^0} + \frac{{}_nC_1}{n^1} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから、 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ である。さらに $\frac{{}_nC_k}{n^k}$ について

$$\begin{aligned}\frac{{}_nC_k}{n^k} &= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{n^k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} \\ &= \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{1}{k!}\end{aligned}$$

であり、自然数 k について

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k} \\ &\leq \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{n^k} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{{}_nC_k}{n^k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &< 3\end{aligned}$$

である。以上より $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ が示された。

(証明終)

(2)

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ に $n = 1, 2, \dots, 300$ を代入した不等式を辺々かけて式変形すると

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{300}\right)^{300} &< 3^{300} \\ \Leftrightarrow \frac{301^{300}}{300!} &< 3^{300} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{301}{3}\right)^{300} &< 300!\end{aligned}$$

とできる。これと $100 < \frac{301}{3}$ より $100^{300} < 300!$ である。

(答) $100^{300} < 300!$

(3)

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ に $n = 2020$ を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{2021}{2020}\right)^{2020} &< 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2021^{2019}}{2020^{2020}} &< \frac{3}{2021}\end{aligned}$$

である。これと $\frac{3}{2021} < 1$ より $\frac{2021^{2019}}{2020^{2020}} < 1 \Leftrightarrow 2021^{2019} < 2020^{2020}$ である。

(答) $2021^{2019} < 2020^{2020}$