

(1)

はずれくじを n 本とすると、当たりくじが 5 本であるため、くじの総数は $n+5$ 本である。よって、この中から 2 本のくじを同時に引くとき、2 本とも当たりである確率は、

$$\begin{aligned}\frac{{}_5C_2}{{}_{n+5}C_2} &= \frac{\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}}{\frac{(n+5) \cdot (n+4)}{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{20}{(n+5)(n+4)}\end{aligned}$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}\frac{20}{(n+5)(n+4)} &= \frac{5}{39} \\ \Leftrightarrow n^2 + 9n - 136 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-8)(n+17) &= 0 \\ \therefore n &= 8 \quad (\because n > 0)\end{aligned}$$

となるため、はずれくじは 8 本である。

答：8 本

(2)

点 $(-1, 2, 3)$ を中心として、平面 $x=3$ と接する球は半径が 4 となるため、球の方程式は、

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2$$

である。よって、この球が平面 $y=4$ と交わってできる円の方程式は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} (x+1)^2 + (4-2)^2 + (z-3)^2 = 4^2 \\ y=4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (z-3)^2 = (2\sqrt{3})^2 \\ y=4 \end{cases}\end{aligned}$$

となるため、求める円の中心は $(-1, 4, 3)$ であり、半径は $2\sqrt{3}$ である。

答：円の中心： $(-1, 4, 3)$ 半径： $2\sqrt{3}$

(3)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x^5}{(x^3-1)^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{x^3}{(x^3-1)^2} \cdot x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{x^3-1} + \frac{1}{(x^3-1)^2} \right\} \cdot \left(\frac{d}{dx} x^3 \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\log|x^3-1| - \frac{1}{x^3-1} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\log 2 + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6} (1 - 2 \log 2)\end{aligned}$$

である。

答： $\frac{1}{6} (1 - 2 \log 2)$

(4)

$$\begin{aligned}8357 &= 7747 \cdot 1 + 610 \\ 7747 &= 610 \cdot 12 + 427 \\ 610 &= 427 \cdot 1 + 183 \\ 427 &= 183 \cdot 2 + 61 \\ 183 &= 61 \cdot 3\end{aligned}$$

が成り立つため、ユークリッドの互除法より、8357 と 7747 の最大公約数は 61 であり、

$$\begin{aligned}8357 &= 61 \cdot 137 \\ 7747 &= 61 \cdot 127\end{aligned}$$

となる。よって、約分すると、

$$\begin{aligned}\frac{7747}{8357} &= \frac{61 \cdot 127}{61 \cdot 137} \\ &= \frac{127}{137}\end{aligned}$$

となる。

答： $\frac{127}{137}$

(5)

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 2 \\ &= \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - 2 \\ &= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 1 \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) - 1 \\ &= 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) - 1\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x < \pi$ より、 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6} \pi$ であるため、関数 y は $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち、

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき、最大値 1 をとり、 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \pi$ 、すなわち、 $x = \frac{5}{6} \pi$ のとき、最小値 -3 をとる。

答： 最大値： $1 \left(x = \frac{\pi}{3} \right)$ 最小値： $-3 \left(x = \frac{5}{6} \pi \right)$

【解答】

(1)

答： $m(1+r)-x$ (万円)

(2)

答： $a_k=(1+r)a_{k-1}-x$

(3)

(1)より, $a_1=m(1+r)-x$ であり, (2)より,

$$\begin{aligned} a_k &= (1+r)a_{k-1}-x \\ \Leftrightarrow a_k - \frac{x}{r} &= (1+r)\left(a_{k-1} - \frac{x}{r}\right) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} a_k &= \left(a_1 - \frac{x}{r}\right)(1+r)^{k-1} + \frac{x}{r} \\ &= \left\{m(1+r)-x-\frac{x}{r}\right\}(1+r)^{k-1} + \frac{x}{r} \\ &= -\left(\frac{x}{r}-m\right)(1+r)^k + \frac{x}{r} \end{aligned}$$

となる。また, 借金を返済するためには, $\frac{x}{r}-m>0$, すなわち, $x>mr$ が必要であり, y ヶ

月で返済するとき,

$$\begin{aligned} a_y &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(m - \frac{x}{r}\right)(1+r)^y + \frac{x}{r} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+r)^y &= \frac{x}{x-mr} \\ \Leftrightarrow y \log(1+r) &= \log x - \log(x-mr) \\ \therefore y &= \frac{\log x - \log(x-mr)}{\log(1+r)} \end{aligned}$$

となる。

答： $y = \frac{\log x - \log(x-mr)}{\log(1+r)}$

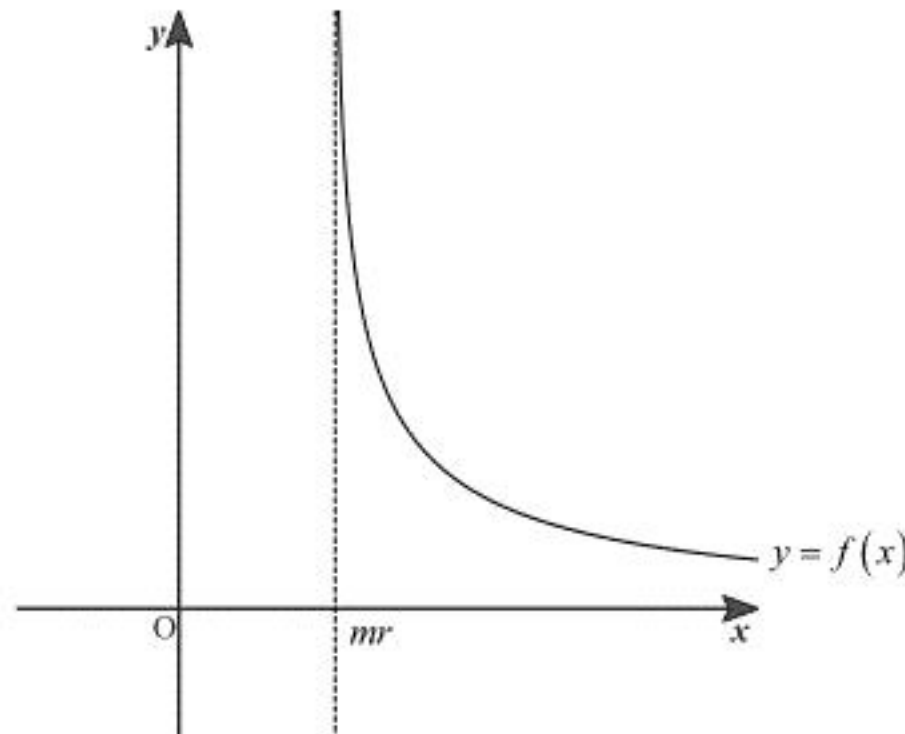
(4)

(3)より, $f(x) = \frac{\log x - \log(x-mr)}{\log(1+r)}$ ($x>mr$)であるため,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\log(1+r)} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-mr}\right) \\ &= -\frac{mr}{x(x-mr)\log(1+r)} \\ &< 0 \\ f''(x) &= \frac{1}{\log(1+r)} \cdot \left\{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-mr)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\log(1+r)} \cdot \frac{x^2 - (x-mr)^2}{x^2(x-mr)^2} \\ &= \frac{2mr\left(x - \frac{1}{2}mr\right)}{x^2(x-mr)^2 \log(1+r)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。よって, $x>mr$ において $f(x)$ は単調減少であり, $y=f(x)$ は下に凸なグラフである。また,

$$\lim_{x \rightarrow mr+0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

となるため, 関数 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。

答：増減：単調減少 凹凸：下に凸 グラフ：上図

(5)

 $m=1000, r=\frac{15}{12} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{80}, x=15$ のとき,

$$mr = 1000 \cdot \frac{1}{80} = \frac{25}{2} < 15 = x$$

であるため, (3)より, 返済が可能であり,

$$\begin{aligned} a_k &= -\left(\frac{x}{r}-m\right)(1+r)^k + \frac{x}{r} \\ &= -\left(\frac{15}{\frac{1}{80}}-1000\right) \cdot \left(1+\frac{1}{80}\right)^k + \frac{15}{\frac{1}{80}} \\ &= 1200 - 200\left(\frac{81}{80}\right)^k \end{aligned}$$

となる。ここで, n ヶ月目に返済し終わるとすると,

$$a_n < 0 < a_{n-1}$$

が成り立つ。また, (4)より,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\log x - \log(x-mr)}{\log(1+r)} \\ &= \frac{\log 15 - \log\left(15 - 1000 \cdot \frac{1}{80}\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{80}\right)} \\ &= \frac{\log 2 + \log 3}{4 \log 3 - 3 \log 2 - \log 10} \\ &= \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{4 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2 - 1} \\ &= \frac{0.3010 + 0.4771}{4 \cdot 0.4771 - 3 \cdot 0.3010 - 1} \\ &= \frac{7781}{54} \\ &= 144 + \frac{5}{54} \end{aligned}$$

であり, a_k は k に関して単調減少であるため,

$$a_{155} < 0 < a_{144}$$

が成り立つ。よって, $n=145$ であるため, 145 ヶ月, すなわち, 12 年1 ヶ月で返済し終わる。

答：12 年1 ヶ月

【解説】

(1)

月利率 r であるため, 1 ヶ月後の利子は mr 万円である。また, k 回目の返済額は x 万円であるため, 1 回目の返済後の残高は,

$$m+mr-x=m(1+r)-x \text{ (万円)}$$

である。

(2)

 k 回目の返済後の残高を a_k とすると, $k-1$ 回目の返済後の残高は a_{k-1} 万円, k 回目の利子は ra_{k-1} 万円, k 回目の返済額は x 万円であるため,

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + ra_{k-1} - x \\ &= (1+r)a_{k-1} - x \end{aligned}$$

が成り立つ。

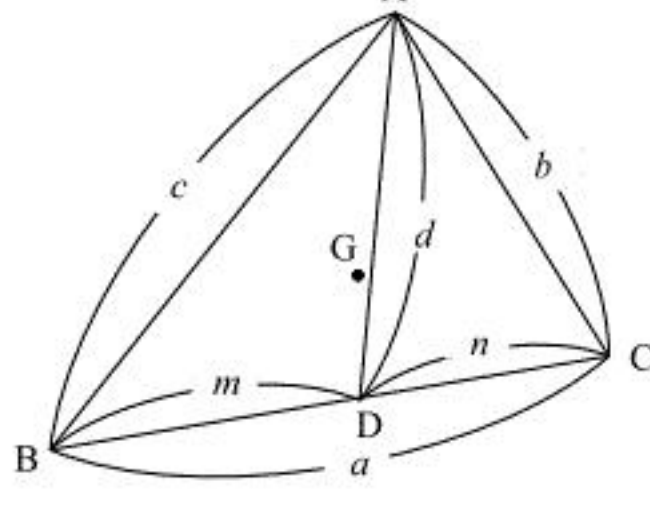
【解答】

(1)

$$\text{答: } \cos \theta = \frac{m^2 + d^2 - c^2}{2md}$$

(2)

$\triangle ABC$ は下図のようになる。



$\triangle ADC$ において、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\cos (180^{\circ} - \theta) \\ &= -\cos \angle ADC \\ &= -\frac{DA^2 + DC^2 - AC^2}{2 \cdot DA \cdot DC} \\ &= -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2nd}\end{aligned}$$

である。よって、(1)より、

$$\begin{aligned}\frac{m^2 + d^2 - c^2}{2md} &= -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2nd} \\ \Leftrightarrow n(m^2 + d^2 - c^2) &= -m(d^2 + n^2 - b^2) \\ \Leftrightarrow b^2 m + c^2 n &= (m+n)(d^2 + mn) \\ \therefore b^2 m + c^2 n &= a(d^2 + mn) \quad (\because a = m+n)\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

$\triangle ABC$ において、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \angle BAC \\ &= c \cdot b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\end{aligned}$$

である。また、 G は $\triangle ABC$ の重心であるため、 $\overline{AG} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$ である。よって、

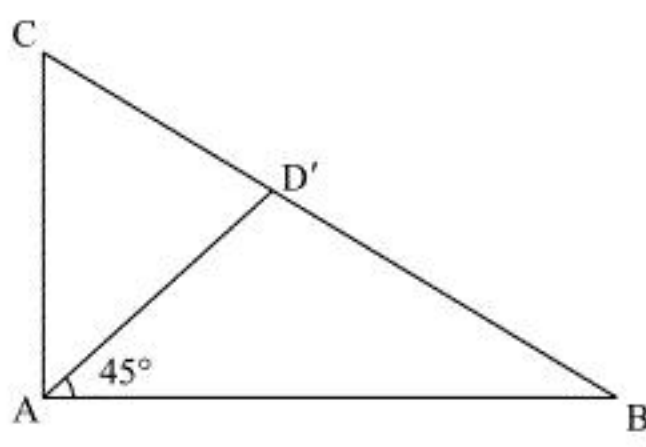
$$\begin{aligned}AG &= \sqrt{|\overline{AG}|^2} \\ &= \sqrt{\left| \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}) \right|^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{c^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{答: } \frac{1}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

(4)

$\angle BAC = 90^{\circ}$ のとき、 $\triangle ABC$ は下図のようになる。



$\triangle ABC$, $\triangle ACD'$, $\triangle ABD'$ の面積は、それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC &= \frac{1}{2} bc \\ \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD' \cdot \sin 45^{\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{4} b AD' \\ \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD' \cdot \sin 45^{\circ} &= \frac{\sqrt{2}}{4} c AD'\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は、 $\triangle ACD'$ の面積と $\triangle ABD'$ の面積の和に等しいため、 AD' の長さは、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} bc &= \frac{\sqrt{2}}{4} b AD' + \frac{\sqrt{2}}{4} c AD' \\ \therefore AD' &= \frac{\sqrt{2} bc}{b+c}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{2} bc}{b+c}$$

(5)

$OA = OB = OC = R$ であるため、

$$\begin{aligned}2\overline{OA} \cdot \overline{OB} &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - (|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}) \\ &= |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - |\overline{AB}|^2 \\ &= R^2 + R^2 - c^2 \\ &= 2R^2 - c^2\end{aligned}$$

であり、同様に、 $2\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\overline{OC} \cdot \overline{OA} = 2R^2 - b^2$ が成り立つ。また、 G は $\triangle ABC$ の重心であるため、 $\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ である。よって、

$$\begin{aligned}OG &= \sqrt{|\overline{OG}|^2} \\ &= \sqrt{\left| \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) \right|^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{|\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2 + 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} + 2\overline{OB} \cdot \overline{OC} + 2\overline{OC} \cdot \overline{OA}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{R^2 + R^2 + R^2 + (2R^2 - c^2) + (2R^2 - a^2) + (2R^2 - b^2)} \\ &= \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{答: } \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}$$

【解説】

(1)

$\triangle ADB$ において、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{DA^2 + DB^2 - AB^2}{2 \cdot DA \cdot DB} \\ &= \frac{m^2 + d^2 - c^2}{2md}\end{aligned}$$

となる。