

(1)

13^{50} は 56 桁なので

$$10^{55} \leq 13^{50} < 10^{56}$$

$$\Leftrightarrow (10^{55})^{\frac{15}{50}} \leq (13^{50})^{\frac{15}{50}} < (10^{56})^{\frac{15}{50}}$$

$$\therefore 10^{16.5} \leq 13^{15} < 10^{16.8}$$

となる。よって 13^{15} は 17 桁であることが分かる。

(答) 17

(2)

(i)

この命題は偽である。

[反例] $a=2, b=4, n=4$ のとき

(ii)

この命題は真である。

n の偶奇で場合分けを行う。自然数 k を用いて

[1] $n=2k-1$ と表せるとき

$$n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1$$

となるので n^2 を 4 で割ると余りは 1 となる。

[2] $n=2k$ と表せるとき

$$n^2 = 4k$$

となるので n^2 を 4 で割ると余りは 0 となる。

以上[1], [2]から n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 となる。

(証明終)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^2 t^2 x^2 dx + \int_0^2 2tx|x-1| dx + \int_0^2 (x-1)^2 dx \\
 &= t^2 \int_0^2 x^2 dx + 2t \int_0^2 x|x-1| dx + \int_0^2 (x-1)^2 dx
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^2 x^2 dx$, $\int_0^2 x|x-1| dx$, $\int_0^2 (x-1)^2 dx$ は定数であるので $f(t)$ は t に関する 2 次関数であることが分かる。 a は $f(t)$ を最小にする値であるので

$$f'(a) = 0$$

が成立する。よって

$$f'(t) = 2t \int_0^2 x^2 dx + 2 \int_0^2 x|x-1| dx$$

であるので

$$f'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \{ax^2 + x|x-1|\} dx = 0$$

となる。ここで

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

であり

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x|x-1| dx &= \int_0^1 x(-x+1) dx + \int_1^2 x(x-1) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

であるので

$$\frac{8}{3}a + 1 = 0$$

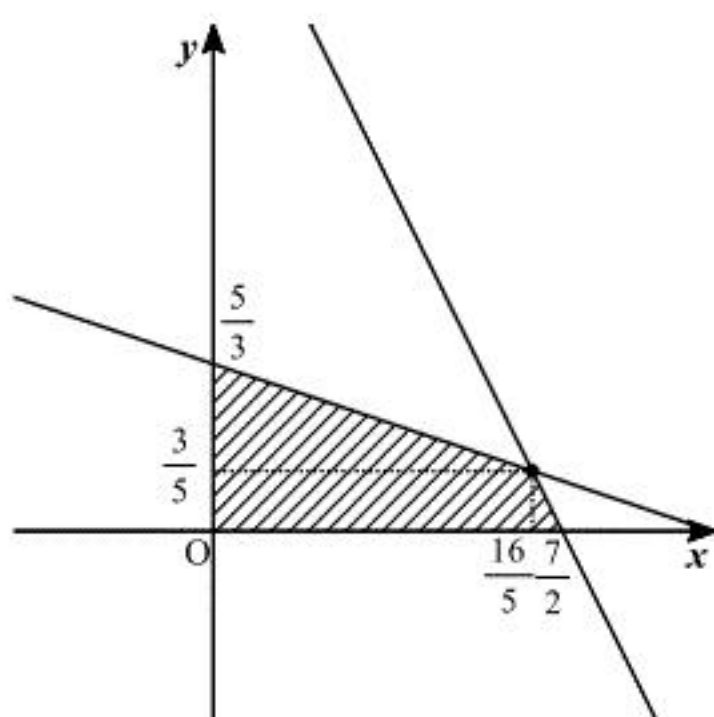
$$\therefore a = -\frac{3}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{3}{8}$$

(1)

$2x+y=7$ と $x+3y=5$ の交点の座標は $\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ となる。よって領域 D は下図の斜線部分(ただし、境界線も含む。)



(答) 前図の斜線部分(ただし、境界線を含む。)

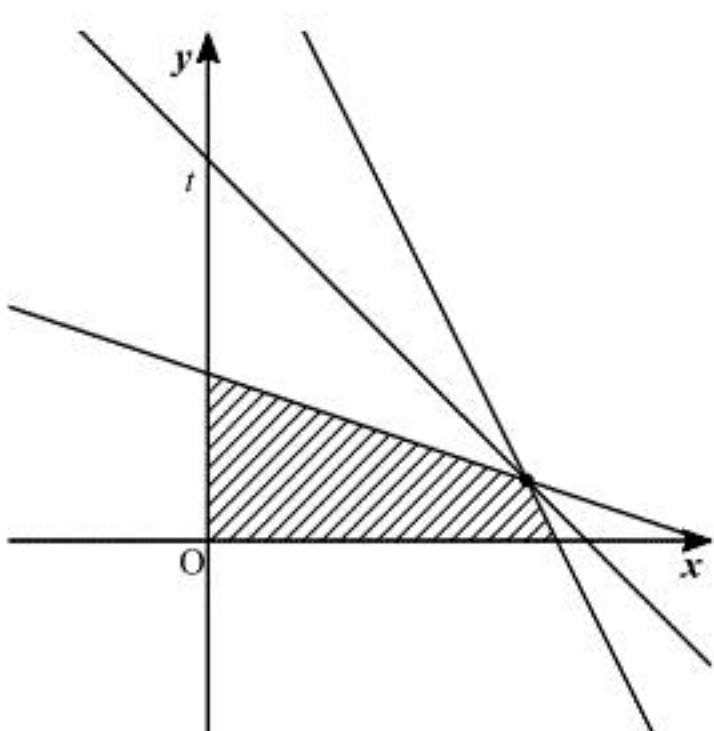
(2)

直線 $x+y=t$ が領域 D のある点を通るように動かしたときの t の最大値が求める値である。

$x+y=t$ の傾きは -1 であり

$$-2 < -1 < -\frac{1}{3}$$

より(1)で求めた図を用いると



上図のように $x+y=t$ が $\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ を通るとき t が最大となり、その値は

$$t = \frac{19}{5}$$

となる。

(答) $\frac{19}{5}$

(3)

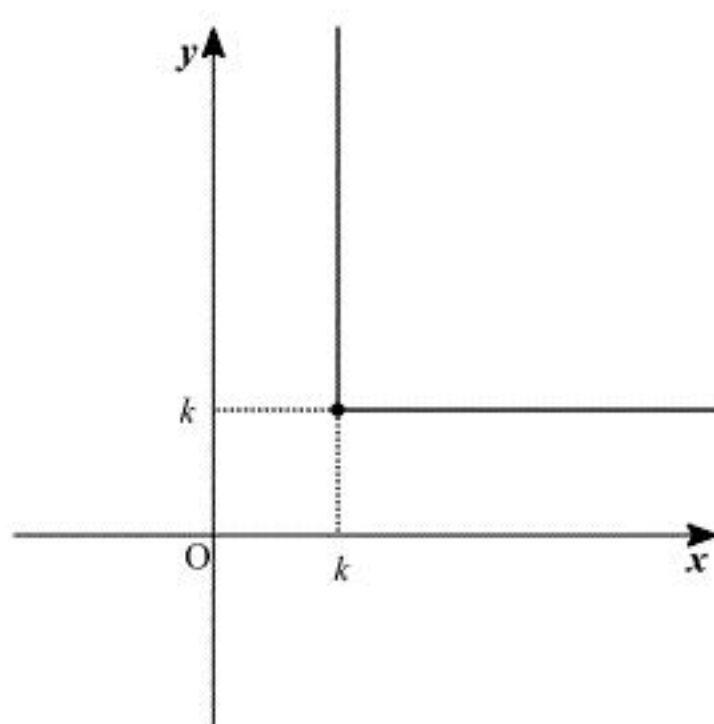
$x \leq y$ において

$$S_k = (k, y)$$

となり、 $x > y$ において

$$S_k = (x, k)$$

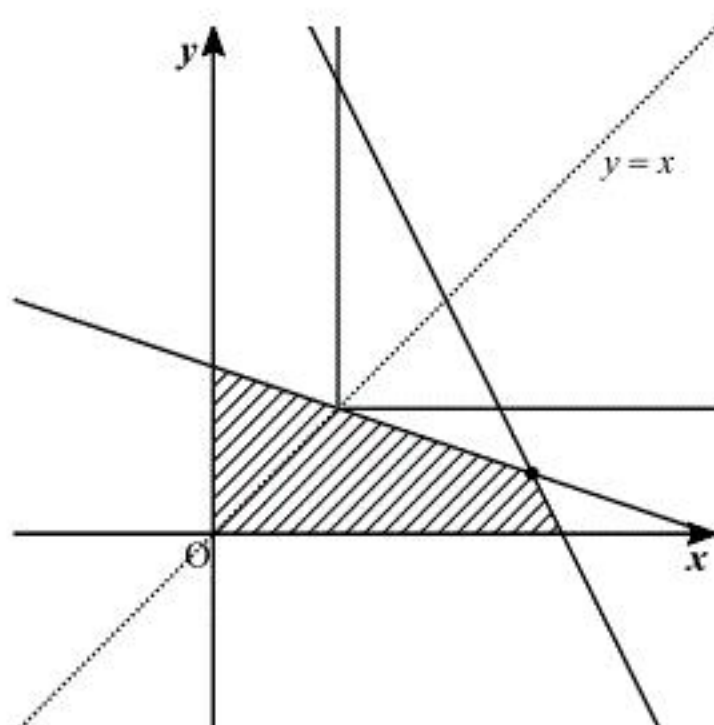
となるので、 S_k を図示すると下図のようになる。



(答) 前図

(4)

S_k と D が共有点を持つように動かしたときの k の最大値を求めれば良い、それは(1), (2)から



上図のように S_k の角が D の境界上にあるときで角の座標は $y=x$ と $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ の交点で

$\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ となる。よって $\min(x, y)$ の最大値は $\frac{5}{4}$ となる。

(答) $\frac{5}{4}$

(1)

$$\frac{1}{2} < \frac{5}{7} < 1$$

より

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

となる。

$$\frac{1}{3} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

より

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}$$

となる。

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$$

より

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}$$

(2)

当たりとなる引き方は

①赤

①黄→②赤

①黄→②黄→③赤

のいずれかであるので、求める確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{31}{100}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{31}{100}$$

(3)

①:赤1, 白0, 黄1

②:赤1, 白1, 黄1

③:赤1, 白2, 黄1

④:赤1, 白6, 黄0

とすれば(2)と同様にして当たる確率は

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

となる。

(答) ①:赤1, 白0, 黄1, ②:赤1, 白1, 黄1, ③:赤1, 白2, 黄1, ④:赤1, 白6, 黄0

(1)

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

となる。よって

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

(2)

$\overrightarrow{\text{PH}}$ が平面 α に垂直であるとき

$$\overrightarrow{\text{PH}} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\text{PH}} \cdot \vec{b} = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

が成り立つ。ここで

$$\overrightarrow{\text{PH}} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow s|\vec{a}|^2 + t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 1$$

$$\therefore 2s + t = x + z$$

となり、 $\overrightarrow{\text{PH}} \cdot \vec{b} = 0$ について同様にして

$$s + 2t = y + z$$

となる。よって

$$\begin{cases} s = \frac{2x - y + z}{3} \\ t = \frac{-x + 2y + z}{3} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} s = \frac{2x - y + z}{3} \\ t = \frac{-x + 2y + z}{3} \end{cases}$$

(3)

$\triangle \text{OAB}$ を底面とし、底面の面積と四面体の高さを求める。 $\triangle \text{OAB}$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle \text{OAB} &= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となり、点 C から平面 α 上の底面におろした垂線の足を H' とすると(2)から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OH}'} &= \frac{2 \cdot 2 - 3 + 11}{3} \vec{a} + \frac{-2 + 2 \cdot 3 + 11}{3} \vec{b} \\ &= 4\vec{a} + 5\vec{b} \\ &= (4, 5, 9) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{\text{CH}'} = (2, 2, -2)$$

となり

$$|\overrightarrow{\text{CH}'}| = 2\sqrt{3}$$

となる。よって求める体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1$$