

1

(1)

B, Cはx軸に関し対称であり、点Aもx軸上なので、 $\triangle ABC$ の外心はx軸上でD(a, 0)となっている。ここで、DはABCを通る円の中心なので、

$$AD = BD = CD$$

より、

$$|2-a| = \sqrt{(2\cos\theta - a)^2 + \sin^2\theta}$$

である。両辺を二乗して

$$4 - 4a + a^2 = a^2 - 4\cos\theta a + 1 + 3\cos^2\theta$$

$$\therefore 4(1 - \cos\theta)a = 3 - 3\cos^2\theta$$

となるが、今 $0 < \theta < \pi$ より

$$\cos\theta \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\theta \neq 0$$

であるから

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos^2\theta}{1 - \cos\theta} \\ &= \frac{3}{4}(1 + \cos\theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{4}(1 + \cos\theta)$$

(2)

$$a < \frac{3}{4}(1+1) = \frac{3}{2} < 2$$

より、

$$2 - a > 0$$

であるから

$$r = 2 - a = \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\cos\theta$$

である。以上より、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta) = \frac{1}{2}$$

2

(1)

P'_0 は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

であり、 Q'_0 は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

である。すなわち $P'_0(a, c), Q'_0(b, d)$ である。

(答) $P'_0(a, c), Q'_0(b, d)$

(2)

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP'} = s \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OQ'} = u \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \end{cases}$$

で、今

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$$

より、

$$su + tv = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ'} = 0$$

より、

$$su(a^2 + c^2) + tv(b^2 + d^2) + sv(ab + cd) + tu(ab + cd) = 0$$

$$\Leftrightarrow su\{a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)\} + (sv + tu)(ab + cd) = 0 \quad (\textcircled{1} \text{より}) \quad \dots (*)$$

今、 s, t, u, v は任意なので、

$$a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) \neq 0 \quad \text{または} \quad ab + cd \neq 0$$

のとき

$$su\{a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)\} > 0 \quad \text{かつ} \quad (sv + tu)(ab + cd) \geq 0$$

または

$$su\{a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)\} \geq 0 \quad \text{かつ} \quad (sv + tu)(ab + cd) > 0$$

と s, t, u, v をとることができ、 $(*)$ が 0 にならなくなる。したがって、

$$a^2 + c^2 - (b^2 + d^2) = 0 \quad \text{かつ} \quad ab + cd = 0$$

以上より、上式を整理して、

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2, ab + cd = 0$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

条件より、

$$\left| \overrightarrow{OP'_0} \right| \text{ と } x \text{ 軸の正の向きとのなす角が } \frac{2}{3}\pi$$

なので、 $\overrightarrow{OP'_0}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の内積が $\left| \overrightarrow{OP'_0} \right| \cdot 1 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi$ と書ける。よって、

$$\overrightarrow{OP'_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \overrightarrow{OP'_0} \right| \cdot 1 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。また、 $\left| \overrightarrow{OQ'_0} \right| = 2$ より

$$b^2 + d^2 = 4 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。(2)より、

$$b^2 + d^2 = a^2 + c^2 = 4$$

で、これを③に代入すると、

$$a = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore c = \pm\sqrt{3}$$

となる。これらを(2)の条件 $ab + cd = 0$ に代入して、

$$-b \pm \sqrt{3}d = 0$$

すなわち

$$b = \pm\sqrt{3}d \quad (c = \pm\sqrt{3} \text{ と複号同順})$$

である。④に代入して、

$$3d^2 + d^2 = 4$$

すなわち

$$d = \pm 1$$

となる。今、 $ad - bc > 0$ より、 $ad > bc$ で

[1] $c = \sqrt{3}$ のとき、

$$-d > \sqrt{3}b, b = \sqrt{3}d$$

でこれを満たすのは、

$$b = -\sqrt{3}, d = -1$$

[2] $c = -\sqrt{3}$ のとき、

$$-d > -\sqrt{3}b, b = -\sqrt{3}d$$

でこれをみたす b, d は、

$$b = \sqrt{3}, d = -1$$

以上より求める a, b, c, d は、

$$a = -1, b = \mp\sqrt{3}, c = \pm\sqrt{3}, d = -1 \quad (\text{複号同順})$$

であるから A は、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

となる。

(答) $A = \begin{pmatrix} -1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$

3

(1)

B が逆行列を持たないので

$$\begin{aligned}\Delta B &= p \cdot (-1)^p q - (-1)^q \cdot 3 \cdot 4 = 0 \\ \Leftrightarrow pq(-1)^p - 12(-1)^q &= 0\end{aligned}$$

である。両辺に $(-1)^q$ をかけて

$$pq(-1)^{p+q} = 12$$

となるから、

$$\text{「} p+q \text{ は } 2 \text{ の倍数である} \text{」} \cdots \text{①}$$

ことが必要である。今、 p, q は整数で、 $1 \leq p \leq 6, 1 \leq q \leq 6, pq = 12$ から、

$$(p, q) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

のいずれか。よって①より、

$$(p, q) = (2, 6), (6, 2)$$

のいずれか。よって求める確率は、

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

となる。

(答) $\frac{1}{18}$

(2)

可換であるとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & (-1)^q \cdot 3 \\ 4 & (-1)^p \cdot q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & (-1)^q \cdot 3 \\ 4 & (-1)^p \cdot q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7p+12 & 21(-1)^q+3q(-1)^p \\ 4p & 12(-1)^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7p+12(-1)^q & 3p \\ 28+4q(-1)^p & 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

で各成分は等しくなるので、

$$\begin{cases} 7p+12=7p+12(-1)^q \\ 21(-1)^q+3q(-1)^p=3p \\ 4p=28+4q(-1)^p \\ 12(-1)^q=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=(-1)^q & \cdots \text{②} \\ 7(-1)^q+q(-1)^p=p & \cdots \text{③} \\ p=7+q(-1)^p & \cdots \text{④} \\ (-1)^q=1 & \cdots \text{⑤} \end{cases}$$

である。②、⑤より、 $q=2, 4, 6$ のいずれかで③、④は同じ条件であると分かる。よって、

[1] $q=2$ のとき、

$$\text{③, ④} \Leftrightarrow p=7+2(-1)^p$$

で $p \leq 6$ より、 $p=1, 3, 5$ のいずれかで、上式をみたす p は、 $p=5$ のみ。

[2] $q=4$ のとき、

$$\text{③, ④} \Leftrightarrow p=7+4(-1)^p$$

で $p \leq 6$ より、 $p=1, 3, 5$ のいずれかで、上式をみたす p は、 $p=3$ のみ。

[3] $q=6$ のとき、

$$p=7+6(-1)^p$$

と書け、同様にしてこれをみたす p は $p=1$ のみと分かる。

したがって、 p, q の組は、

$$(p, q) = (2, 5), (4, 3), (6, 1)$$

の3つで可換となる確率は、

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

である。

(答) $\frac{1}{12}$

(1)

$f(x) = x - \sin x$ を考えると両辺 x で微分して、

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad (x = 2m\pi \text{ (} m \text{ は } m \geq 0 \text{ で } m: \text{整数) の時に等号成立})$$

で、 $x=0$ の時に最小値 $f(0)$ をとるとわかり、 $x \geq 0$ で単調増加するので、

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

$$\therefore x \geq \sin x \quad \dots \textcircled{1}$$

が示される。次に、 $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)$ として、両辺を x で微分すると、

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

もう一度両辺を x で微分して、

$$g''(x) = -\sin x + x \geq 0 \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

で $x \geq 0$ で $g'(x)$ は単調増加するとわかり、

$$g'(x) \geq g'(0) = 1 - 1 + 0 = 0$$

よって、 $g'(x) \geq 0$ より、 $g(x)$ も $x \geq 0$ で、単調増加し、 $g(x) \geq g(0) = 0$ より、

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \dots \textcircled{2}$$

が示される。以上①、②より、

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

が示された。

(証明終)

(2)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

を数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1$$

で

$$\frac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$$

より成立。

[2] $n=m$ のとき、題意が成立すると仮定すると、($m \geq 1$)

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

で $n=m+1$ のとき、③の両辺に $(m+1)^3$ を加えると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 \\ &= \frac{(m+1)^2}{4} \{m^2 + 4(m+1)\} \\ &= \frac{(m+1)^2}{4} \cdot (m+2)^2 \end{aligned}$$

$n=m+1$ の時に題意は成立する。

以上より、任意の 1 以上の整数 n に関し、題意は成立することが示された。

(証明終)

(3)

(1)より、

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{k}{n^2} \right)^3 \leq \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \leq \frac{k}{n^2}$$

で

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{k^3}{n^6} \right) \right\} \leq \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \quad \dots (*)$$

となる。(*)の左辺について

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{k^3}{n^6} \right) \right\} &= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad ((2) \text{より}) \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{24n^2} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。また(*)の右辺について

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④は $n \rightarrow \infty$ とすると、第 2 項は 0 になり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{k^3}{n^6} \right) \right\} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{6}$$

である。また、⑤より、 $n \rightarrow \infty$ で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{7}$$

となり、⑥、⑦そして(*)より、はさみうちの原理により、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

(1)

合成関数の微分を考えて、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+1}) \quad (\text{真数条件より(分母)}>0 \text{で} 0 \text{にならない。}) \\
 &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
 &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

以上より、

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \left(= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \right)$$

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \left(= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \right)$$

(2)

$$I = \int_0^1 \log(x + \sqrt{x^2+1}) dx$$

とおく。部分積分を考えて、

$$\begin{aligned}
 I &= \left[x \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad ((2) \text{より}) \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1
 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\int_0^1 f(x) dx = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^1 f(x) dx = \log(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

(3)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で、今

$$\begin{aligned}
 e^{f(x)} &= x + \sqrt{x^2+1} \\
 e^{-f(x)} &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1} - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} \right) \\
 &= \frac{x(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$(g \circ f)(x) = x$$

となることが示された。

(証明終)