

1

(1)

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

(2)

$y = f(x)$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{e}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \sqrt{e} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{e}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3e}}{2} x - \frac{\sqrt{3e}}{12} \pi + \sqrt{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{\sqrt{3e}}{2} x - \frac{\sqrt{3e}}{12} \pi + \sqrt{e}$$

(3)

法線の傾きを a とすると、

$$\frac{\sqrt{3e}}{2} \cdot a = -1$$

$$\therefore a = -\frac{2}{\sqrt{3e}}$$

である。よって、 $y = f(x)$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{e}\right)$ における法線の方程式は、

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3e}} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{e}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3e}}{3e} x + \frac{\sqrt{3e}}{9e} \pi + \sqrt{e}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{2\sqrt{3e}}{3e} x + \frac{\sqrt{3e}}{9e} \pi + \sqrt{e}$$

(1)

$$\overrightarrow{QR} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$$

で、直線 $y = \sqrt{3}x$ の方向ベクトルの 1 つを $\vec{\ell} = (1, \sqrt{3})$ とすると、

$$\overrightarrow{QR} \cdot \vec{\ell} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 - a_1 + \sqrt{3}(b_2 - b_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_2 + \sqrt{3}b_2 = a_1 + \sqrt{3}b_1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また線分 QR の中点 $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$ は $y = \sqrt{3}x$ 上に存在するので、

$$\frac{b_1 + b_2}{2} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}a_2 - b_2 = -\sqrt{3}a_1 + b_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、①と②より

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1$$

(2)

$a = a_1, b = -b_1$ なので

$$a_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b$$

(1)

各桁が1か2である5桁の自然数の総数は 2^5 通りであり、それらのうち、1のみ、または2のみで構成されているものは2通りである。したがって、求める総数は

$$2^5 - 2 = 30 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 30 通り

(2)

各桁が1, 2, 3のいずれかである5桁の自然数の総数は 3^5 通りである。ここで、それらのうち、各桁が1, 2のいずれかで構成される場合は 2^5 通りであり(2, 3や3, 1の場合も同様に 2^5 通り)、1のみで構成される場合は1通りである(2のみや、3のみの場合も同様に1通り)。よって、各桁が1, 2, 3のいずれかで、それらすべてが用いられている自然数の場合の数は

$$3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1 = 150 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 150 通り

(1)

求める和は、初項10、末項99、項数

$$99-10+1=90$$

の等差数列の和であるから、

$$\frac{1}{2}(10+99) \cdot 90 = 4905$$

である。

(答) 4905

(2)

$$S_n = 10^{n-1} + (10^{n-1} + 1) + \cdots + (10^n - 1)$$

である。よって、求める和は、初項 10^{n-1} 、末項 $10^n - 1$ 、項数

$$(10^n - 1) - 10^{n-1} + 1 = 9 \cdot 10^{n-1}$$

の等差数列の和であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \{10^{n-1} + (10^n - 1)\} \cdot 9 \cdot 10^{n-1} \\ &= \frac{9}{2} (11 \cdot 10^{n-1} - 1) \cdot 10^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S_n = \frac{9}{2} (11 \cdot 10^{n-1} - 1) \cdot 10^{n-1}$$

(3)

$$\begin{aligned} \log_{10} S_n - 2n &= \log_{10} S_n - \log_{10} 10^{2n} \\ &= \log_{10} \frac{S_n}{10^{2n}} \\ &= \log_{10} \left\{ \frac{9}{2} \left(\frac{11}{100} - \frac{1}{10^{n+1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{10^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

であるので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_{10} S_n - 2n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{10} \left\{ \frac{9}{2} \left(\frac{11}{100} - \frac{1}{10^{n+1}} \right) \right\} \\ &= \log_{10} \left(\frac{9}{2} \cdot \frac{11}{100} \right) \\ &= \log_{10} \frac{99}{200} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \log_{10} \frac{99}{200}$$

5

(1)

$$f(x) = x^2 \sqrt{1-x}$$

の導関数は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{1-x} + x^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{2 \cdot 2x(1-x) - x^2}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{x(4-5x)}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{4}{5}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{16}{125}\sqrt{5}$	↘	0

以上より、 $f(x)$ のとりうる値の範囲は $0 \leq f(x) \leq \frac{16}{125}\sqrt{5}$ となる。

$$(\text{答}) 0 \leq f(x) \leq \frac{16}{125}\sqrt{5}$$

(2)

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$$

について、 $\sqrt{1-x} = t$ とおくと

$$x^2 = (1-t^2)^2, dx = -2tdt$$

x	0	→	1
t	1	→	0

となる。以上より、置換積分を用いて

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 (1-t^2)^2 \cdot t \cdot (-2t) dt \\ &= \int_0^1 2t^2 (1-t^2)^2 dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) dt \\ &= 2 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) \\ &= \frac{2}{105} (35 - 42 + 15) \\ &= \frac{16}{105} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{16}{105}$$