

平成 20 年度入学試験問題

数 学 (前期)

注意事項

1. 問題は 1 から 5 の 5 題です。
2. 解答は解答用紙の裏面には記入しないこと。
3. 解答用紙の裏面は計算用紙として使用してよい。
4. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 (配点率 20 %)

次の問に答えなさい.

- (1) 13^{50} は 56 桁の数である. 13^{15} は何桁の数か.
- (2) 次の各命題の真偽を調べなさい. 真である場合には真であることを証明し, 偽である場合には反例を挙げなさい.
 - (i) 2つの自然数 a, b と整数 n について, n が a で割り切れ, b でも割り切れれば, n は ab で割り切れる.
 - (ii) n を自然数とすると, n^2 を 4 で割ると余りは 0 か 1 である.

2 (配点率 約 17 %)

関数 $f(t) = \int_0^2 (|x - 1| + tx)^2 dx$ に対して, $f(t)$ を最小にする t の値を a とおく. 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\int_0^2 x(|x - 1| + ax) dx = 0$$

また, a の値を求めなさい.

3 (配点率 20 %)

次の連立不等式

$$2x + y \leq 7, \quad x + 3y \leq 5, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

が表す領域を D とするとき, 次の問に答えなさい. ただし, 以下において,

$$\min(x, y) = \begin{cases} x & (x \leq y \text{ のとき}) \\ y & (x > y \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする.

- (1) 領域 D を図示しなさい.
- (2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $x + y$ の最大値を求めなさい.
- (3) $k > 0$ として, $\min(x, y) = k$ を満たす座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を S_k とする. S_k を図示しなさい.
- (4) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $\min(x, y)$ の最大値を求めなさい.

4

(配点率 約 23 %)

1 より小さい正の有理数 r は

$$r = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1 n_2} + \cdots + \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_k} \quad (*)$$

の形で表せる. ただし, $n_1, n_2, \cdots, n_k$ は $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ を満たす自然数である.

例えば, $r = \frac{5}{13}$ の場合, n_1 として, $\frac{5}{13} \geq \frac{1}{n}$ を満たす最小の自然数 n である 3 をとり, さらに, $\frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{13}$ であるから, $\frac{2}{13}$ について

同様の手続きで n_2 として 7 をとる. 以下, 同様の手続きを繰り返せば,

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 13} \text{ が得られる. 次の問に答えなさい.}$$

(1) $\frac{5}{7}$ を上の (*) の形で表しなさい.

(2) ①, ②, ③の番号が書かれた 3 個の箱があり, ①の箱には赤玉 1 個, 白玉 2 個, 黄玉 1 個が入っている. ②の箱には赤玉 1 個, 白玉 3 個, 黄玉 1 個が入っている. そして, ③の箱には赤玉 1 個, 白玉 4 個が入っている. このとき, 次のようにしてくじ引きを行う.

まず①の箱から 1 個玉を取り出す. その玉が赤玉なら当たり, 白玉ならはずれで, いずれの場合もくじ引きは終了する. また, それが黄玉なら②の箱から 1 個玉を取り出すことにする. 以下同様に, 赤玉なら当たり, 白玉ならはずれ, 黄玉なら次の番号の箱から玉を取り出すとして当たりはずれを決める. このくじ引きで当たりとなる確率を求めなさい.

(3) 4 個の箱 ①, ②, ③, ④を新たに用意して(2)と同様のくじを作り, 当たる確率を $\frac{5}{7}$ にしたい. ただし, 各箱に, 赤玉はちょうど 1 個, そして, 黄玉は 1 個または 0 個入れれるものとする. 各箱に, 赤玉の他に, 白玉と黄玉をそれぞれ何個ずつ入れれば当たりの確率が $\frac{5}{7}$ のくじとなるか? そのような一つの場合を求めなさい.

5

(配点率 20 %)

空間において、原点を O とし、 xz 平面上に点 $A(1, 0, 1)$ を、 yz 平面上に点 $B(0, 1, 1)$ をとる。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。以下の問に答えなさい。

(1) 2つのベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ のなす角 θ を求めなさい。

(2) 3点 O 、 A 、 B を通る平面 α 上の点 H に対して、 $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす実数 s 、 t が一組定まる。平面 α 上にない点 $P(x, y, z)$ に対して、ベクトル $\overrightarrow{PH}$ が平面 α と垂直になるとき s 、 t を、それぞれ、 x 、 y 、 z を用いて表しなさい。

(3) 点 $C(2, 3, 11)$ に対して、四面体 $OABC$ の体積を求めなさい。