

平成20年度 理学部 入学試験

数 学

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
- 2 この冊子の問題は、1 ページから 2 ページまで印刷されている。
- 3 解答冊子には受験番号がすでに記入してあるので、その番号が**自分の受験番号と一致することを確認すること**。万一自分の受験番号と異なる場合には、手を挙げて監督者に知らせること。
- 4 解答冊子の表紙の所定の欄に、**志望学科名（2 箇所）と氏名**を記入すること。
- 5 解答は解答冊子の所定の欄に記入すること。各問題ごとに解答用紙と下書き用紙とがあるので注意すること。
- 6 下書き用紙に記入したものは、消さずに残しておくこと。
- 7 試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- 8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

- 1 楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の 3 点 $A(2, 0)$, $B(2 \cos \theta, \sin \theta)$, $C(2 \cos(-\theta), \sin(-\theta))$ ($0 < \theta < \pi$) を通る円の中心の座標を $(a, 0)$, 半径を r とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a を θ の関数として表せ。
- (2) r を θ の関数として $r(\theta)$ と表すとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} r(\theta)$ を求めよ。

- 2 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする。O を原点とする座標平面上の点 $P_0(1, 0)$, $Q_0(0, 1)$ が f によって移される点をそれぞれ P'_0, Q'_0 とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P'_0, Q'_0 の座標を求めよ。
- (2) 2 点 P, Q が f によって移される点をそれぞれ P', Q' と表す。 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となるすべての P, Q に対して $\overrightarrow{OP'} \perp \overrightarrow{OQ'}$ が成り立っている。このとき、

$$ab + cd = 0, \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

を示せ。

- (3) $ad - bc > 0$ とし、 f について、(2) の条件に加えて、さらに次のことが成り立っているとするとする： $\overrightarrow{OP'_0}$ と x 軸の正の向きとのなす角は $\frac{2}{3}\pi$, また $|\overrightarrow{OQ'_0}| = 2$ である。このとき、行列 A を求めよ。

- 3 サイコロを 2 回ふる。1 回めに出る目の数を p とし、2 回めに出る目の数を q とする。このとき、2 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} p & (-1)^q 3 \\ 4 & (-1)^p q \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) B が逆行列を持たない確率を求めよ。
- (2) B と行列 $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ が交換可能となる確率を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

- (2) 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ を求めよ。

5 関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

- (2) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。

- (3) $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$(g \circ f)(x) = x$$