

(1)

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{pa+qb})^2 - (p\sqrt{a} + q\sqrt{b})^2 &= pa+qb - p^2a - q^2b - 2pq\sqrt{ab} \\
 &= pa(1-p) + qb(1-q) - 2pq\sqrt{ab} \\
 &= pqa + pqb - 2pq\sqrt{ab} \quad (\because p+q=1) \\
 &= pq(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\because p, q \geq 0)
 \end{aligned}$$

$p\sqrt{a} + q\sqrt{b}$ と $\sqrt{pa+qb}$ は共に 0 以上なので,

$p\sqrt{a} + q\sqrt{b} \leq \sqrt{pa+qb}$ が成り立つことが示された。

(等号は $a=b$ または $p=0$ または $q=0$ のとき成立する)

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 n^5 - n &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\
 &= (n-1)n(n+1)(n^2 + 1) \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(i) k を整数として, $n=5k \pm 1$ または $n=5k$ と表せるとき

①の $(n-1)n(n+1)$ の部分が 5 の倍数になるので, $n^5 - n$ は 5 の倍数になる。

(ii) k を整数として, $n=5k \pm 2$ と表せるとき

$$\begin{aligned}
 n^2 + 1 &= (5k \pm 2)^2 + 1 \\
 &= 5(5k^2 \pm 4k + 1)
 \end{aligned}$$

これより, ①の $(n^2 + 1)$ の部分が 5 の倍数になるので, $n^5 - n$ は 5 の倍数になる。

以上より, 任意の自然数 n に対して $n^5 - n$ は 5 で割り切れることが示された。

(証明終)

(1)

$y=f(x)=x^2-2x$ とおく。

点 P における接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= 2(a-1)x - a^2 \end{aligned}$$

点 O における接線は

$$\begin{aligned} y &= f'(0)x + f(0) \\ &= -2x \end{aligned}$$

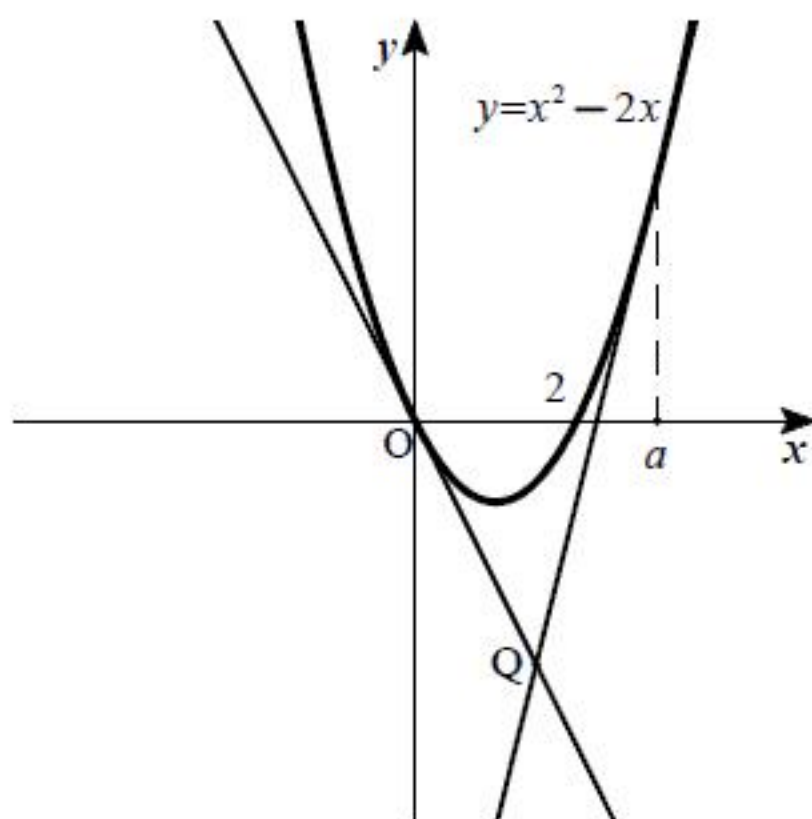
よって、交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -2x &= 2(a-1)x - a^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

さらに、 y 座標は

$$y = -2 \cdot \frac{a}{2} = -a$$

よって、点 Q の座標は $\left(\frac{a}{2}, -a\right)$



(答) $Q\left(\frac{a}{2}, -a\right)$

(2)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\frac{a}{2}} \{x^2 - 2x - (-2x)\} dx + \int_{\frac{a}{2}}^a (x^2 - 2x - \{2(a-1)x - a^2\}) dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{a}{2}}^a (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_{\frac{a}{2}}^a \\ &= \frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{24} \\ &= \frac{a^3}{12} \end{aligned}$$

(答) $S(a) = \frac{a^3}{12}$

(1)

$$\begin{aligned}
 S_n &= R_1 + R_2 + \cdots + R_n \\
 &= \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

(2)

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ であるので,}$$

$$S_n - S < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{1}{3} < \frac{1}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} < \frac{103}{50}$$

$$\Leftrightarrow 50(2n^2 + 3n + 1) < 103n^2$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 150n - 50 > 0$$

$$\therefore n < \frac{75 - \sqrt{75^2 + 150}}{3}, \frac{75 + \sqrt{75^2 + 150}}{3} < n$$

$$n > 0 \text{ より, } \frac{75 + \sqrt{75^2 + 150}}{3} < n \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで, $75^2 < 75^2 + 150 = 5775 < 5776 = 76^2$ より

$$50 = \frac{75+75}{3} < \frac{75 + \sqrt{75^2 + 150}}{3} < \frac{75+76}{3} < 51$$

よって, ①を満たす最小の n は 51 である。

(答) 51

以下、ア、イ、ウ、エをグループ1、オ、カ、キ、クをグループ2とする。

(1)

T_2 が2位になるのは、 T_1 と T_2 が決勝まで残る場合である。

すなわち、 T_1 と T_2 がグループ1と2に分かれる場合である。

T_1 が一方のグループに入った場合、そのグループの残りチーム数は3、

もう一方のグループのチーム数は4なので、求める確率は

$$\frac{4}{3+4} = \frac{4}{7}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{7}$$

(2)

T_6 が2位になるのは、 T_6 よりも強いチームが全て、 T_6 が入ったグループとは別のグループに入る場合である。しかし、1つのグループのチーム数は4であり、 T_6 よりも強いチーム数は5であるので、このようなことは起こり得ない。

(証明終)

(3)

(2)での考察により、自分よりも強いチーム数が4以下であるチームが2位になる可能性がある。そのようなチームは、 T_2 を除くと T_3, T_4, T_5 の3チームである。

(T_1 は必ず優勝するので、2位にはならない)

T_3 が2位となるのは、 T_3 が T_1, T_2 と別のグループに入る場合である。

T_1 と同じグループに T_2 を入れ、それとは別のグループに T_3 を入れれば良いので、その確率は

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

T_4 が2位となるのは、 T_4 が T_1, T_2, T_3 と別のグループに入る場合である。

先ほどと同様に考えると、求める確率は

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35}$$

T_5 が2位となるのは、 T_5 が T_1, T_2, T_3, T_4 と別のグループに入る場合である。

先ほどと同様に考えると、求める確率は

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{35}$$

$$(\text{答}) \quad T_3: \frac{2}{7}, T_4: \frac{4}{35}, T_5: \frac{1}{35}$$

(1)

$\vec{g} = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1)$ なので,

$$\begin{aligned} (\vec{a}-\vec{g}) \cdot \vec{g} &= \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3} \right) \cdot \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) \\ &= \frac{x+y+z}{9}(2x-y-z-x+2y-z-x-y+2z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $\vec{a}-\vec{g}$ と $\vec{g}$ は直交する。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}| &= \sqrt{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} \\ |\vec{b}-\vec{c}| &= \sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2} \\ &= |\vec{a}-\vec{b}| \end{aligned}$$

よって、 $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{c}$ は長さが等しい。

(証明終)

(3)

点 G を三角形 ABC の重心とする。

(1)より AG と OG は直交するので、求める四面体は底面が三角形 ABC、高さが OG とみなせる。まず、三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}-\vec{b}|^2 |\vec{b}-\vec{c}|^2 - \{(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{b}-\vec{c})\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &\left(\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} \{ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \} \geq 0 \right) \end{aligned}$$

高さ OG は

$$|\vec{g}| = \frac{\sqrt{3}}{3} |x+y+z|$$

よって、求める体積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} |x+y+z| \\ &= \frac{1}{6} |x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz| \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} |x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz|$$