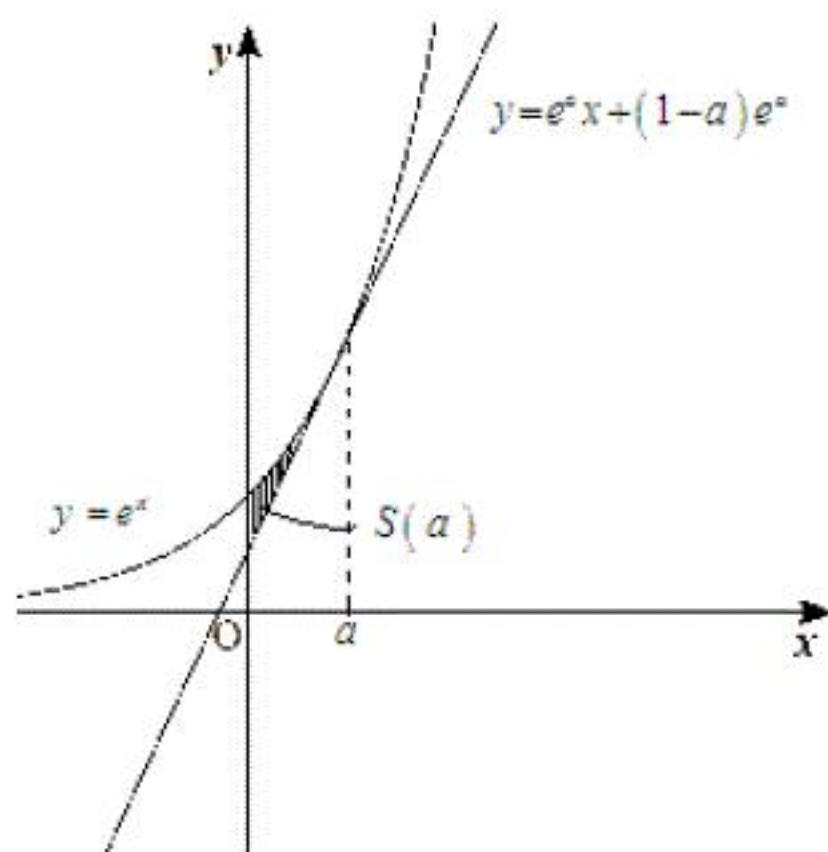


- (1)  $y' = e^x$  だから  $l$  の方程式は,

$$y = e^a(x - a) + e^a = e^a x + (1 - a)e^a$$

(答)  $y = e^a x + (1 - a)e^a$

- (2)



グラフより,

$$S(a) = \int_0^a [e^x - \{e^a x + (1 - a)e^a\}] dx$$

$$= \left[ e^x - \frac{1}{2} e^a x^2 - (1 - a)e^a x \right]_0^a$$

$$= e^a - a e^a + \frac{1}{2} a^2 e^a - 1$$

(答)  $S(a) = e^a - a e^a + \frac{1}{2} a^2 e^a - 1$

また,  $S(a)$  を  $a$  で微分すると,

$$\begin{aligned} S'(a) &= e^a - (e^a + a e^a) + \frac{1}{2} (2 a e^a + a^2 e^a) \\ &= \frac{1}{2} a^2 e^a \end{aligned}$$

ゆえに,  $a > 0$  で  $S'(a) > 0$  となるから  $S(a)$  は単調に増加する。

(証明終)

(1)

$\frac{2}{7} = \log_{10} 10^{\frac{2}{7}}$  であるから、 $10^{\frac{2}{7}}$  と 2 の大小関係を比較すればよい。

$$\left(10^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 10^2 = 100$$

$$2^7 = 128$$

であり、 $x^7$  が  $x > 0$  で単調増加することにより、

$$10^{\frac{2}{7}} < 2$$

すなわち、

$$\frac{2}{7} < \log_{10} 2$$

同様に、

$$2^{13} = 8192 < 10^4$$

であることより、

$$\log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

(証明終)

(1)

区間  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  では  $\cos x$  は単調減少するので,

$$f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \cos \theta| dx$$

$$= \int_0^{\theta} (\cos x - \cos \theta) dx - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos \theta) dx$$

$$= [\sin x - x \cos \theta]_0^{\theta} - [\sin x - x \cos \theta]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cos \theta - 2\theta \cos \theta + 2 \sin \theta - 1$$

$$(\text{答}) \quad f(\theta) = \frac{\pi}{2} \cos \theta - 2\theta \cos \theta + 2 \sin \theta - 1$$

(1)

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n}x - 8 \text{ とする。}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$$

であり、

$$f'_n(x) = 3x^2 + \frac{1}{n} > 0$$

ゆえに、 $f_n(x)$  は単調増加関数なので、中間値の定理より  $x$  軸との交点がただ一つ存在する。ゆえに、命題成立。

(証明終)

(2)

(i)

$$f_n(0) = -8, \quad f_n(2) = \frac{2}{n} (> 0) \text{ なので、中間値の定理より } 0 < a_n < 2 \text{ である。}$$

また、

$$a_n^3 + \frac{1}{n}a_n - 8 = 0$$

$$a_{n+1}^3 + \frac{1}{n+1}a_{n+1} - 8 = 0$$

を辺々引くと、

$$\begin{aligned} a_n^3 - a_{n+1}^3 + \frac{1}{n}a_n - \frac{1}{n+1}a_{n+1} &= (a_n - a_{n+1})(a_n^2 + a_na_{n+1} + a_{n+1}^2) + \frac{1}{n}(a_n - a_{n+1}) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)a_{n+1} \\ &= (a_n - a_{n+1})\left(a_n^2 + a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)}a_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

$0 < a_{n+1}$  から、

$$(a_n - a_{n+1})\left(a_n^2 + a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n(n+1)}a_{n+1} < 0$$

であり、

$$a_n^2 + a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 + \frac{1}{n} > 0$$

なので、

$$a_n - a_{n+1} < 0$$

すなわち、

$$a_n < a_{n+1}$$

が導かれる。

(証明終)

(ii)

$0 < a_n < 2$  から

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2$$

である。

また、 $a_n^3 + \frac{1}{n}a_n - 8 = 0$  から、

$$-\frac{1}{n}a_n = a_n^3 - 8 = (a_n - 2)(a_n^2 + 2a_n + 4)$$

$0 < a_n < 2$  なので、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}a_n\right) = 0$$

ゆえに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2)(a_n^2 + 2a_n + 4) = 0$$

であるが、

$$4 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2a_n + 4) \leq 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 12$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$$

を得る。

(答)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

(1)

点 Q は線分 BC を 1:2 に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \\ &= \left( \frac{2}{3}, 2, 0 \right)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left( \frac{2}{3}, 2, -1 \right)\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AQ} = \left( \frac{2}{3}, 2, -1 \right)$$

(2)

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{6}, \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} = 2$$

であり,

内積に関する式から,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3)

点 P は, 線分 AQ 上にあるので,  $0 \leq t \leq 1$  を満たす媒介変数  $t$  を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OQ} \\ &= \left( \frac{2}{3}(1-t), 2(1-t), t \right) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表わされる。

$\overrightarrow{OD}$  と  $\overrightarrow{OP}$  のなす角が  $\theta$  であることから, (2) より,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}}{3} &= \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{OP}|} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} &= \frac{\frac{8}{3} - \frac{2}{3}t}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}t^2 - \frac{80}{9}t + \frac{40}{9}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} &= \frac{8-2t}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{49t^2 - 80t + 40}}\end{aligned}$$

両辺 2 乗して整理すると,

$$\begin{aligned}49t^2 - 80t + 40 &= (4-t)^2 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{2}, 1\end{aligned}$$

を得る。したがって, ①より, 求める点 P の座標は, 以上から,

$$(0, 0, 1), \left( \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2} \right)$$

$$(\text{答}) \quad (0, 0, 1), \left( \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2} \right)$$