

III

【問 1】

一辺の長さが a の長方形のもう一辺の長さは $\frac{l-2a}{2}$ であるから、長方形の面積は

$$a \times \frac{l-2a}{2} = \frac{a(l-2a)}{2}$$

また、底辺の長さが a の二等辺三角形の斜辺の長さは $\frac{l-a}{2}$ であるから、頂点から

底辺に下ろした垂線の長さは

$$\sqrt{\left(\frac{l-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{l(l-2a)}}{2}$$

よって、この二等辺三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{l(l-2a)}}{2} = \frac{a\sqrt{l(l-2a)}}{4}$$

長方形と二等辺三角形の面積が等しくなるとき、

$$\frac{a(l-2a)}{2} = \frac{a\sqrt{l(l-2a)}}{4}$$

$$2\sqrt{l-2a} = \sqrt{l}$$

両辺 2 乗すると、

$$4(l-2a) = l$$

$$\therefore a = \frac{3}{8}l$$

(これは $0 < a < \frac{l}{2}$ を満たしており、適する)

(答) $a = \frac{3}{8}l$

【問 2】

(1)

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

(答) $P = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

(2)

$$Q = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3}Q = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \cdots + \frac{n}{3^{n+1}}$$

これらの辺々同士を引いて

$$\frac{2}{3}Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\therefore Q = \frac{3}{2}P - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$$

(答) $Q = \frac{3}{2}P - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$

【問 3】

(1)

正四面体の各面は一辺の長さが l の正三角形であるので、

$$\begin{aligned} S &= 4 \times \left(\frac{1}{2} \times l \times l \times \sin 60^\circ \right) \\ &= \sqrt{3}l^2 \end{aligned}$$

(証明終)

(2)

点 A から三角形 BCD に垂線 AH を下ろすと、点 H は正三角形 BCD の重心となる。よって、

$$BH = \frac{2}{3} \left(\frac{l}{2} \times \sqrt{3} \right) = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

三角形 AHB で三平方の定理を用いて、

$$AH = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$

よって、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times l \times l \times \sin 60^\circ \right) \times \frac{\sqrt{6}}{3}l \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12}l^3 \end{aligned}$$

(証明終)

(3)

球の中心を O とすると、

$$OA = OB = R$$

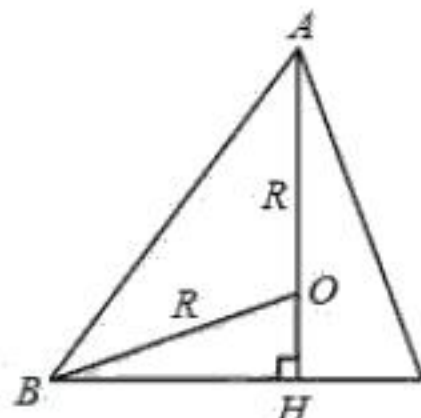
三角形 OBH に三平方の定理を用いて、

$$R^2 = OH^2 + BH^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{3}l - R \right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$= l^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}lR + R^2$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{4}l$$



(答) $R = \frac{\sqrt{6}}{4}l$