

平成 21 年度入学試験問題

数 学 (前期)

注意事項

1. 問題は 1 から 5 の 5 題です。
2. 解答は解答用紙の裏面には記入しないこと。
3. 解答用紙の裏面は計算用紙として使用してよい。
4. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 (配点率 20 %)

次の問に答えなさい。

- (1) 0 以上の実数 a, b, p, q に対して, $p + q = 1$ のとき次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$p\sqrt{a} + q\sqrt{b} \leq \sqrt{pa + qb}$$

- (2) 自然数 n に対して, $n^5 - n$ は 5 で割り切れることを示しなさい。

2 (配点率 約 17 %)

放物線 $y = x^2 - 2x$ 上の点 $P(a, b)$ と原点 $O(0, 0)$ における 2 つの接線の交点を Q とする。ただし, $a > 0$ とする。

- (1) 点 Q の座標を a で表しなさい。
(2) 放物線と 2 つの接線で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めなさい。

3 (配点率 20 %)

原点と x 軸上の点 $H(1, 0)$ の間に原点から H に向かって順番に点 $H_0(0, 0)$, $H_1(x_1, 0)$, $\dots$, $H_{n-1}(x_{n-1}, 0)$, $H_n(x_n, 0)$ が等間隔で並んでいる。ただし, $H_n = H$ である。ここで, 関数 $f(x) = x^2$ に対して, 線分 $H_{k-1}H_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) を底辺とする高さ $f(x_k)$ の長方形の面積を R_k とし,

$$S_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

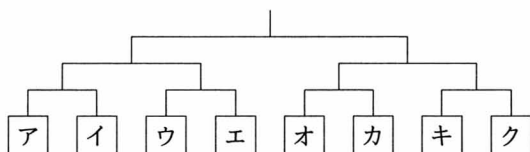
とおく。また, 放物線 $y = f(x)$, x 軸, および直線 $x = 1$ とで囲まれる領域の面積を S とする。次の問に答えなさい。

- (1) S_n を n の式として表しなさい。
(2) $S_n - S < \frac{1}{100}$ となる最小の n を求めなさい。

4 (配点率 約 23 %)

8 つの野球チーム $T_1, T_2, \dots, T_8$ が勝ち抜き戦(トーナメント方式)を行い 1 位と 2 位のチームを決める. これら 8 チームの中では T_1 が 1 番強く, T_2, T_3 の順に弱くなり, T_8 が 1 番弱い. $i < j$ であれば T_i は T_j に必ず勝つものとする.

勝ち抜き戦は下の対戦表の ア ~ ク に入るチームをくじ引きで決めて行う.



対戦表

次の問に答えなさい.

- (1) T_2 が 2 位になる確率を求めなさい.
- (2) T_6 が 2 位になることはないことを示しなさい.
- (3) T_2 以外のチームで, 2 位になる可能性のある各チームに対し, そのチームが 2 位になる確率を求めなさい.

5 (配点率 20 %)

ベクトル $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (y, z, x)$, $\vec{c} = (z, x, y)$ に対して, $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

とする. また, $x = y = z$ でないとし, $x + y + z \neq 0$ とする. 次の問に答えなさい.

- (1) $\vec{a} - \vec{g}$ と $\vec{g}$ は直交することを示しなさい.
- (2) $\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{b} - \vec{c}$ は長さが等しいことを示しなさい.
- (3) 点 $A(x, y, z)$, $B(y, z, x)$, $C(z, x, y)$ と $O(0, 0, 0)$ を頂点とする四面体の体積を x, y, z の式で表しなさい.