

平成21年度 理学部 入学試験

数 学

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけない。
- 2 この冊子の問題は，1 ページから 2 ページまで印刷されている。
- 3 解答冊子には受験番号がすでに記入してあるので，その番号が**自分の受験番号と一致することを確認すること**。万一自分の受験番号と異なる場合には，手を挙げて監督者に知らせること。
- 4 解答冊子の表紙の所定の欄に，**志望学科名（2 箇所）と氏名**を記入すること。
- 5 解答は解答冊子の所定の欄に記入すること。各問題ごとに解答用紙と下書き用紙とがあるので注意すること。
- 6 下書き用紙に記入したものは，消さずに残しておくこと。
- 7 試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
- 8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。
- 9 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

1 次の問いに答えよ.

- (1) $t = \sin x - \cos x$ とするとき, $\sin 2x$ を t で表せ.
- (2) $f(x) = \sin^3 x - \cos^3 x$ を t で表し, $0 \leq x \leq 2\pi$ のときの $f(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ.

2 4個の白玉と2個の赤玉が入っている袋から玉を1個ずつ取り出していく. ただし, 取り出した玉はもとに戻さない.

- (1) 3個目を取り出したとき, 取り出した3個の玉すべてが白玉である確率を求めよ.
- (2) はじめて赤玉を取り出すまでに取り出す白玉の個数の期待値を求めよ.

3 自然数 n に対して,

$$a_n = \int_1^n \log x \, dx, \quad b_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x} + \log x - \log(1+x) \right) dx$$

とおく.

- (1) a_n を求めよ.
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ. ただし, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ (e は自然対数の底) となることは証明なしに使ってよい.

4 次の問いに答えよ.

(1) 三角形 ABC において, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$, $|\overrightarrow{BC}| = 3$ であるとき,
内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ の値を求めよ.

(2) 三角形 PQR において, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} = -2$, $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 3$ であるとき,
 $|\overrightarrow{QR}|$ の値を求めよ.

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において $b \neq 0$ とする. また, 行列 X ,

実数 u, v に対し,

$$X_0 = X - uE - vA$$

とおく. ここで, E は単位行列である.

(1) X が $AX = XA$ をみたすとき, $AX_0 = X_0A$ となることを示せ.

(2) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_0 & w_0 \end{pmatrix}$ となるような u と v
を x, y, a, b で表せ.

(3) X が $AX = XA$ をみたすとき, u, v を (2) のように定めると,

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることを示せ.