

平成21年度 工学部 入学試験

数 学

注意事項

- 1 問題冊子1冊，解答用紙3枚が配られているか確認すること。
- 2 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 試験中に問題冊子（2頁よりなる）の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
- 4 解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 5 各解答用紙上部には2箇所**受験番号**を記入する欄がある。試験開始後直ちに記入すること。記入箇所は合計**6箇所**である。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけない。
- 7 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

1 曲線 $y = e^x$ 上の点 (a, e^a) における接線を ℓ とする。以下の問に答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) $a > 0$ のとき、 ℓ と $y = e^x$ および y 軸とで囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに $S(a)$ が $a > 0$ で増加することを示せ。

2 以下の問に答えよ。

(1) 不等式

$$\frac{2}{7} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

を示せ。

(2) 不等式

$$\frac{5}{13} < \log_{10} \frac{5}{2} < \frac{3}{7}$$

を示せ。

(3) 次の不等式を満たす自然数 n のうち最小のものを求めよ。

$$\left(\frac{5}{2}\right)^n > 1000$$

3 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対し

$$f(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \cos \theta| dx$$

とおく。以下の問に答えよ。

(1) $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

4 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) x の 3 次方程式

$$x^3 + \frac{1}{n}x - 8 = 0$$

の実数解はただ一つであることを示せ。

(2) a_n を (1) の実数解とする。

(i) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 < a_n < 2, \quad a_n < a_{n+1}$$

(ii) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

5 O を原点とする座標空間に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(1, 1, 2)$ がある。線分 BC を $2:1$ に内分する点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AQ}$ の成分を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OA}$ のなす角を θ とする。 $\cos \theta$ を求めよ。

(3) 点 P が線分 AQ 上にあり、 $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角も θ であるとする。このとき P の座標を求めよ。