

(1)

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots$$

なので $\frac{1}{7}$ は循環小数となりその周期は 6 である。つまり小数点以下第 n 位の数字は n を 6 で

割った余りによって決まる。

ここで

$$2010 = 6 \cdot 335$$

より 2010 は 6 で割りきれ。6 で割ると割りきれの場合、小数点以下第 n 位の数字はつねに 7 なので小数点以下第 2010 位の数字は 7 である。

(答) 7

(2)

$\log_a X = x, \log_a Y = y$ とおくと

$$\log_a X = x$$

$$\Leftrightarrow X = a^x$$

となり同様にすると

$$Y = a^y$$

となる。

$$\begin{aligned} \log_a XY &= \log_a a^x a^y \\ &= \log_a a^{x+y} \\ &= x + y \\ &= \log_a X + \log_a Y \end{aligned}$$

以上より、証明された。

(証明終)

(1)

内分点のベクトルの公式より

$$\vec{c} = \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{n}{m+n} \vec{a} + \frac{m}{m+n} \vec{b}$$

(2)

問題文より $|\vec{a}| = m, |\vec{b}| = n$ である。これを用いると

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{c}) &= \frac{n}{m+n} |\vec{a}|^2 + \frac{m}{m+n} (\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \frac{m^2 n}{m+n} + \frac{km}{m+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{b}, \vec{c}) &= \frac{n}{m+n} (\vec{a}, \vec{b}) + \frac{m}{m+n} |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{kn}{m+n} + \frac{mn^2}{m+n} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad (\vec{a}, \vec{c}) = \frac{m^2 n}{m+n} + \frac{km}{m+n}, (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{kn}{m+n} + \frac{mn^2}{m+n}$$

(3)

 $\angle AOC = \theta_1$, $\angle BOC = \theta_2$ とおく。

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{c}|} \\ &= \frac{1}{|\vec{c}|} \left\{ \frac{mn}{m+n} + \frac{k}{m+n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b}| |\vec{c}|} \\ &= \frac{1}{|\vec{c}|} \left\{ \frac{mn}{m+n} + \frac{k}{m+n} \right\} \end{aligned}$$

より

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2$$

である。ここで θ_1 と θ_2 はともに三角形の内角なので $0 < \theta_1 < \pi$, $0 < \theta_2 < \pi$ である。したがって $\theta_1 = \theta_2$ つまり $\angle AOC = \angle BOC$ が示された。

(証明終)

(1)

円周角の定理より

$$\angle QAO = \frac{1}{2}\theta$$

ここで三角形 AOP に着目すると

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{2}\theta &= \frac{PO}{AO} \\ &= t\end{aligned}$$

したがって $t = \tan \frac{1}{2}\theta$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \tan \frac{1}{2}\theta$$

(2)

 $1 + \tan^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}$ よりここに(1)の答えと半角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{1}{2}\theta &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ &= \frac{1}{1 + t^2}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

また

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

(3)

対偶をとって示す。

対偶は「 t が有理数なら $\cos \theta$, $\sin \theta$ いずれも有理数となる」である。(2)より $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ であるので t が有理数ならこれは有理数となる。同様に $\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$ であるので t が有理数ならこれは有理数となる。以上より対偶が示せたため命題「 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ 少なくとも一方が無理数なら t は無理数である」が示された。

(証明終)

(1)

辺 AB が青く光るためには A と B で違う色に点灯すればよい。このようなことが起きる確率は B が A と違う色に点灯する確率と等しく $\frac{2}{3}$ である。

辺 CD においても同様に考えるとこの辺が青く点灯する確率は $\frac{2}{3}$ である。

したがって求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(答) $\frac{4}{9}$

(2)

余事象である「辺 AB と辺 CD がともに同じ色に点灯する」確率を考える。

どちらも青く点灯する確率は(1)より $\frac{4}{9}$ である。

どちらも赤に点灯するには全ての頂点で赤に点灯すればよくその確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

である。

黄、緑に点灯する場合も同様であり確率はそれぞれ $\frac{1}{81}$ である。

したがって辺 AB と辺 CD が違う色に点灯する確率は

$$1 - \left(\frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{1}{81}\right) = \frac{14}{27}$$

である。

(答) $\frac{14}{27}$

(3)

すべての辺が青色になるためには A と B, B と C, C と D, D と A でそれぞれ違う色に点灯すればよい。

A をある色に決めたとき, B が A と違う色に点灯する確率は $\frac{2}{3}$ である。

C が B と違う色に点灯し, かつ D が A, C と違う色に点灯する確率について,

$$A \text{ と } C \text{ が同じ色に点灯する場合は } \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$A \text{ と } C \text{ が違う色に点灯する場合は } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

であるため, $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ である。

よって求める確率は,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

(答) $\frac{2}{9}$

(1)

長方形 ATUB の面積は $(u-t) \cdot g(t,u)$ でありこれが $S(t,u)$ と等しいので

$$S(t,u) = (u-t) \cdot g(t,u)$$

が成り立つ。ここに $t=1, u=3$ を代入すると

$$\begin{aligned} S(1,3) &= 2 \cdot g(1,3) \\ &= 44 \end{aligned}$$

となる。

(答) 44

(2)

$S(t,u) = (u-t) \cdot g(t,u)$ より,

$$g(t,u) = \frac{S(t,u)}{u-t}$$

が成り立つ。ここで $S_0(x) = S(0,x)$ より,

$$S(t,u) = S_0(u) - S_0(t)$$

となる。したがって,

$$g(t,u) = \frac{S_0(u) - S_0(t)}{u-t}$$

$$(答) \quad g(t,u) = \frac{S_0(u) - S_0(t)}{u-t}$$

(3)

$$\begin{aligned} S(t,u) &= \int_t^u f(x) dx \\ &= (u-t) \cdot g(t,u) \end{aligned}$$

である。この式に $t=0, u=x$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= xg(0,x) \\ &= x^3 + x^2 + 5x \end{aligned}$$

この両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 5$$

となる。

$$(答) \quad f(x) = 3x^2 + 2x + 5$$