

$$x^3 - ax = x(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) \quad (\because a > 0)$$

であるから,

$$|x^3 - ax| = \begin{cases} x^3 - ax & (-\sqrt{a} \leq x \leq 0, \sqrt{a} \leq x) \\ -x^3 + ax & (x < -\sqrt{a}, 0 < x < \sqrt{a}) \end{cases}$$

である。 $\sqrt{a}$ と 1 の大小で場合分けする。

[1] $0 < \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\sqrt{a}} (-x^3 + ax) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 (x^3 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 \right]_{\sqrt{a}}^1 \\ &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となり, これは $a = \frac{1}{2}$ のときに最小値 $\frac{1}{8}$ をとる。

[2] $1 \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow 1 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 (-x^3 + ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となり, これは $a = 1$ のときに最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

[1][2]より, 求める最小値は $\frac{1}{8}$ である。

(1)

楕円 C 上の任意の点の座標は $(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と表すことができる。

1 次変換 A によってこの点が移動する先の座標は

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \frac{4}{3}\cos\beta \\ \frac{3}{4}\sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha\cos\theta + 4\cos\beta\sin\theta \\ 3\sin\alpha\cos\theta + 3\sin\beta\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。任意の θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して、この点が楕円 C 上にあるような α の条件を求めればよい。この点の座標を楕円 C の式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{(4\cos\alpha\cos\theta + 4\cos\beta\sin\theta)^2}{4^2} + \frac{(3\sin\alpha\cos\theta + 3\sin\beta\sin\theta)^2}{3^2} = 1 \\ & \Leftrightarrow (\cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\sin\theta)^2 + (\sin\alpha\cos\theta + \sin\beta\sin\theta)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \cos^2\alpha\cos^2\theta + 2\cos\alpha\cos\theta\cos\beta\sin\theta + \cos^2\beta\sin^2\theta \\ & \quad + \sin^2\alpha\cos^2\theta + 2\sin\alpha\cos\theta\sin\beta\sin\theta + \sin^2\beta\sin^2\theta = 1 \\ & \Leftrightarrow (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ & \quad + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)\sin^2\theta = 1 \\ & \Leftrightarrow \cos^2\theta + \sin 2\theta \cos(\alpha - \beta) + \sin^2\theta = 1 \\ & \Leftrightarrow \sin 2\theta \cos(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

となる。これが任意の θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して成り立つ条件は、

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha - \beta) = 0 \\ & \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ & \Leftrightarrow \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + n\pi \end{aligned}$$

である。(ただし、 n は任意の整数である。)

$$(\text{答}) \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \text{ は任意の整数})$$

(2)

[1] n が偶数のとき

$$\cos\alpha = -\sin\beta, \quad \sin\alpha = \cos\beta$$

であるから、

$$A = \begin{pmatrix} -\sin\beta & \frac{4}{3}\cos\beta \\ \frac{3}{4}\cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \quad \cdots \text{①}$$

となる。このとき、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - E = O$$

が成り立つので、

$$A^3 = AA^2 = AE = A$$

が成り立つ。よって、 $A^3 = E$ となる条件は $A = E$ であるが、

①の(1, 1)成分と(2, 2)成分がともに1になることは無いので、不適。

[2] n が奇数のとき

$$\cos\alpha = \sin\beta, \quad \sin\alpha = -\cos\beta$$

であるから、

$$A = \begin{pmatrix} \sin\beta & \frac{4}{3}\cos\beta \\ -\frac{3}{4}\cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}$$

となる。このとき、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - 2\sin\beta A + E = O$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} A^3 &= A(2\sin\beta A - E) \\ &= 2\sin\beta A^2 - A \\ &= 2\sin\beta(2\sin\beta A - E) - A \\ &= (4\sin^2\beta - 1)A - 2\sin\beta E \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $A^3 = E$ となる条件は、

$$\begin{aligned} & (4\sin^2\beta - 1)A - 2\sin\beta E = E \\ & \Leftrightarrow (2\sin\beta + 1)(2\sin\beta - 1)A - (2\sin\beta + 1)E = O \\ & \Leftrightarrow (2\sin\beta + 1)\{(2\sin\beta - 1)A - E\} = O \end{aligned}$$

である。

$$[\text{a}] \quad 2\sin\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\beta = -\frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ であるから、} A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \mp\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (複号同順) となる。}$$

$$[\text{b}] \quad (2\sin\beta - 1)A - E = O \Leftrightarrow (2\sin\beta - 1)A = E \text{ のとき}$$

$(2\sin\beta - 1)A$ の(1, 1)成分が1になる必要があるので、

$$\begin{aligned} & (2\sin\beta - 1)\sin\beta = 1 \\ & \Leftrightarrow (\sin\beta - 1)(2\sin\beta + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \sin\beta = 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

が必要である。 $\sin\beta = 1$ のとき、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ となり、 $A^3 = E$ を満たす。

$\sin\beta = -\frac{1}{2}$ のときは[a]で考えたので、ここでは考えない。

以上[1][2]より、求める行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \mp\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (複号同順)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \mp\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (複号同順)}$$

(1)

$$\begin{aligned}
|\overline{AB}|^2 &= 4 \\
\Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= 4 \\
\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 &= 4 \\
\Leftrightarrow 3 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2 &= 4 \\
\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

である。また、 L は直線 AB 上にあるので、実数 s を用いて

$$\overline{OL} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。さらに、 $OL \perp AB$ なので

$$\begin{aligned}
\overline{AB} \cdot \overline{OL} &= 0 \\
\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\} &= 0 \\
\Leftrightarrow (1-s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 - (1-s)|\vec{a}|^2 - s\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1-s}{2} + 3s - 2(1-s) - \frac{s}{2} &= 0 \\
\Leftrightarrow 4s - \frac{3}{2} &= 0 \\
\Leftrightarrow s &= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ に代入して

$$\overline{OL} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \quad \overline{OL} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

(2)

直線 LP と直線 OB の交点を H とおくと、 P は直線 OB に関して L と対称な点なので

$$\overline{LP} = 2\overline{LH}, \quad \overline{LH} \cdot \overline{OB} = 0$$

が成り立つ。ここで、 H は直線 OB 上にあるので、実数 k を用いて

$$\overline{OH} = k\overline{OB} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。すると、

$$\begin{aligned}
\overline{LH} \cdot \overline{OB} &= 0 \\
\Leftrightarrow (\overline{OH} - \overline{OL}) \cdot \overline{OB} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(k\vec{b} - \frac{5}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}\right) \cdot \vec{b} &= 0 \\
\Leftrightarrow k|\vec{b}|^2 - \frac{5}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{3}{8}|\vec{b}|^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow 3k - \frac{5}{16} - \frac{9}{8} &= 0 \\
\Leftrightarrow k &= \frac{23}{48}
\end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{2}$ に代入して

$$\overline{OH} = \frac{23}{48}\vec{b}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OL} + \overline{LP} \\
&= \overline{OL} + 2\overline{LH} \\
&= \overline{OL} + 2(\overline{OH} - \overline{OL}) \\
&= 2\overline{OH} - \overline{OL} \\
&= 2 \cdot \frac{23}{48}\vec{b} - \left(\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}\right) \\
&= -\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b}
\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overline{OP} = -\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b}$$

(1)

$$2^a + p^2 = q^4$$

$$\Leftrightarrow q^4 - p^2 = 2^a$$

$$\Leftrightarrow (q^2 + p)(q^2 - p) = 2^a$$

ここで、 $q^2 + p > 0$, $2^a > 0$ であるから、 $q^2 - p > 0$ である。

また、 p, q は正の奇数なので、 $q^2 - p$ は偶数である。

さらに、 $q^2 - p$ は 2 以外に素因数を持たないので、自然数 x を用いて、

$$q^2 - p = 2^x \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。このとき、 $q^2 + p = 2^{a-x}$ となる。これらを連立して解くと、

$$\begin{cases} q^2 - p = 2^x \\ q^2 + p = 2^{a-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2^{a-x-1} - 2^{x-1} \\ q^2 = 2^{a-x-1} + 2^{x-1} \end{cases}$$

となる。ここで、 $p = 2^{a-x-1} - 2^{x-1}$ が正の奇数になるとき、

$$2^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

が成り立つ。これと①より、 $q^2 - p = 2$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、

$$q^2 = 2^{a-2} + 1$$

$$\Leftrightarrow (q+1)(q-1) = 2^{a-2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで、 $q-1$ は 2 以外に素因数を持たない正の偶数なので、自然数 y を用いて

$$q-1 = 2^y$$

と表せる。このとき、 $q+1 = 2^{a-y-2}$ となるので

$$2^{a-y-2} - 2^y = 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{a-y-3} - 2^{y-1} = 1$$

が成り立つ。これが成り立つためには、

$$2^{y-1} = 1 \Leftrightarrow y = 1$$

が必要である。このとき $q = 2^y + 1 = 3$ となり、これを②に代入すると

$$8 = 2^{a-2} \Leftrightarrow a = 5$$

となる。さらに、 $p = q^2 - 2 = 7$ となる。

$$2^5 + 7^2 = 3^4$$

は確かに成り立つので、十分である。よって、 $q = 3$ である。

(答) $q = 3$

(1)

$-1 \leq x \leq 1$ において、 $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} > 0$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx &= \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(2)

求める体積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \pi \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \pi (1-x + 2\sqrt{1-x^2} + 1+x) dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (1 + \sqrt{1-x^2}) dx \\ &= 4\pi + 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

である。ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の半円の面積に等しいので

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

である。以上より、求める体積は

$$4\pi + 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2 + 4\pi$$

である。

(答) $\pi^2 + 4\pi$