

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1) \cdot e^{2x} + (1-x) \cdot 2e^{2x} \\ &= (1-2x)e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2) \cdot e^{2x} + (1-2x) \cdot 2e^{2x} \\ &= -4xe^{2x} \end{aligned}$$

これより、 $f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{1}{2}$ のときであり、

$f''(x)=0$ となるのは $x=0$ のときであるから、次のような増減表が書ける。

x	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\curvearrowright$	$\frac{1}{2}e$	$\searrow$

増減表より、変曲点は $(0,1)$ であることが分かる。

(答) $(0,1)$

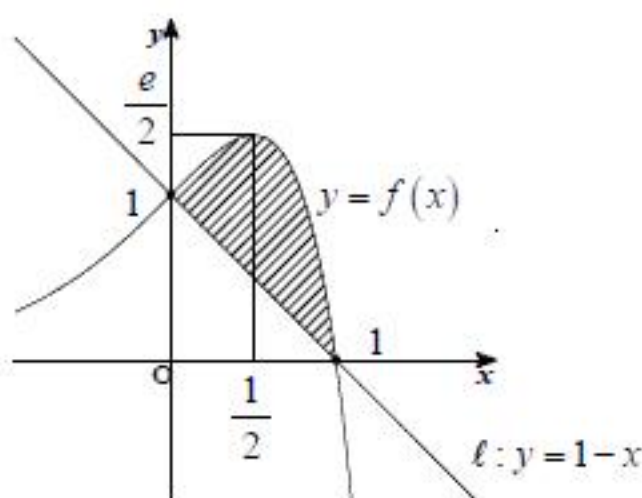
(2)

直線 ℓ は 2 点 $(1,0)$ と $(0,1)$ を通るので、その方程式は $y=1-x$ である。

曲線 C と直線 ℓ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} (1-x)e^{2x} &= 1-x \\ \Leftrightarrow (1-x)(e^{2x}-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 1 \end{aligned}$$

のみである。よって、(1)の増減表と合わせて、グラフは次図のようになる。



求めるのは、上図斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(1-x)e^{2x} - (1-x)\} dx &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}(e^2 - 5) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}(e^2 - 5)$

(1)

P は平面 α 上の点であり、 $\overline{OH} \perp \alpha$ であるから、 $\overline{OH} \perp \overline{PH}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overline{OH} \cdot \overline{PH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OH} \cdot (\overline{OH} - \overline{OP}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OH} &= \overline{OH} \cdot \overline{OH}\end{aligned}$$

となるので、題意は示された。

(証明終)

(2)

$H(x, y, z)$ とおくと、平面 α は 3 点 A, B, C を通るので、(1)より

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OH} &= \overline{OH} \cdot \overline{OH} \\ \Leftrightarrow x + y + z &= x^2 + y^2 + z^2 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OB} \cdot \overline{OH} &= \overline{OH} \cdot \overline{OH} \\ \Leftrightarrow 3x + z &= x^2 + y^2 + z^2 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OC} \cdot \overline{OH} &= \overline{OH} \cdot \overline{OH} \\ \Leftrightarrow -x + y &= x^2 + y^2 + z^2 \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。① - ②, ① - ③より、

$$y = 2x, \quad z = -2x$$

となる。これを②に代入して解くと、

$$x = 9x^2 \Leftrightarrow x(9x - 1) = 0 \quad \therefore x = 0, \frac{1}{9}$$

となる。ここで、 $x = 0$ のときは $x = y = z = 0$ となり、H が O に一致するので不適である。

したがって、 $x = \frac{1}{9}$ であり、点 H の座標は $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$ である。

(答) $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

3

(1)

3 を 1 と 2 の和に分解する仕方を考えることにより、座標 3 に立ち寄る場合として、次の 3 通りが考えられる。

[1] 1, 1, 1 の順に進む場合

座標 0 で 1 進む確率は $\frac{1}{0+1}$ ，座標 1 で 1 進む確率は $\frac{1}{1+1}$ ，座標 2 で 1 進む確率は $\frac{1}{2+1}$

であるから、この場合の確率は

$$\frac{1}{0+1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{2+1} = \frac{1}{6}$$

となる。

[2] 1, 2 の順に進む場合

[1]の場合と同様に考えると、この場合の確率は

$$\frac{1}{0+1} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

となる。

[3] 2, 1 の順に進む場合

[1]の場合と同様に考えると、この場合の確率は

$$\frac{0}{0+1} \cdot \frac{1}{1+1} = 0$$

となる。

以上, [1]から[3]より,

$$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{2}{3}$$

となる。

$$(答) \quad p_3 = \frac{2}{3}$$

(2)

点 A が座標 $n+1$ の位置に立ち寄らないのは、座標 n に立ち寄り、なおかつ、そこから 2 進んで座標 $n+1$ を飛び越えてしまうときに限るから、

$$1 - p_{n+1} = p_n \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore p_{n+1} = -\frac{n}{n+1} p_n + 1$$

となる。

$$(答) \quad p_{n+1} = -\frac{n}{n+1} p_n + 1$$

(3)

(2)の答えの分母を払うと、

$$(n+1)p_{n+1} = -np_n + (n+1)$$

となる。 $q_n = np_n + \alpha n + \beta$ とおき、 $q_{n+1} = -q_n$ となるように α, β を決めると、

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{4}$$

となる。ここで、 $p_1 = 1$ であるから、

$$q_1 = 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

となる。したがって、 q_n は初項 $\frac{1}{4}$ ，公比 -1 の等比数列であるから、

$$q_n = \frac{1}{4}(-1)^{n-1}$$

となる。以上より、

$$\frac{1}{4}(-1)^{n-1} = np_n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^{n-1}}{4n}$$

を得る。

$$(答) \quad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^{n-1}}{4n}$$

(1)

自然数 n に対し,

$$n^2 - 3n + 3 = \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad 1 + ne > 0, \quad 1 - \frac{1}{1+ne} > 1 - \frac{1}{1} = 0$$

であるから、真数条件は常に成立する。よって

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= -1 + \log\left(1 - \frac{1}{1+ne}\right) - \{\log(n^2 - 3n + 3) - \log(1+ne)\} \\ &= \log\frac{1}{e} + \log\left(\frac{ne}{1+ne}\right) - \log(n^2 - 3n + 3) + \log(1+ne) \\ &= \log\frac{ne(1+ne)}{e(1+ne)(n^2 - 3n + 3)} \\ &= \log\frac{n}{n^2 - 3n + 3} \end{aligned}$$

となる。底 $e > 1$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} a_n - b_n \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{n^2 - 3n + 3} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow n \geq n^2 - 3n + 3 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq n \leq 3 \end{aligned}$$

となるので、 $a_n \geq b_n$ を満たす自然数は $n = 1, 2, 3$ である。

(答) $n = 1, 2, 3$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - \log n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n^2 - 3n + 3}{(1+ne)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}}{e + \frac{1}{n}} \\ &= \log \frac{1}{e} \\ &= -1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) -1

まず、三角関数の積和の公式を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin x \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \cdots + \sin nx \sin \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x \right) + \left(\cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x \right) + \cdots + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \end{aligned}$$

と書けることに注意する。

(1)

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{5}{2}x$$

一般に、 $\cos \theta = \cos(-\theta) = \cos(\theta + 2k\pi)$ (k は整数) が成り立つことに注意すると

$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 2k\pi \pm \frac{x}{2} \quad (k \text{ は整数})$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{または} \quad x = \frac{2}{3}k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

となる。このうち、 $0 < x < \pi$ を満たす解は $x = \frac{2}{3}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{2}{3}\pi$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f_{50}(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{101}{2}x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[2 \sin \frac{x}{2} - \frac{2}{101} \sin \frac{101}{2}x \right]_0^\pi \\ &= \frac{100}{101} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{100}{101}$$