

III

【問 1】

P を因数分解すると

$$\begin{aligned} P &= 4xy(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\ &= 4xy(x^2(x+y) + y^2(x+y)) \\ &= 4xy(x+y)(x^2 + y^2) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3 \\ xy &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = 1 \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 \end{aligned}$$

なので、これらを①に代入して、

$$P = 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P = 4xy(x+y)(x^2+y^2), \quad x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ のとき } P = 84$$

【問 2】

※q が正整数であるとき解がないので、q が正整数であるという条件を取り除いて解答する。

解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -p \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = p+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = -q \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} = q-1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つ。③と④から q を消去すると

$$\frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = -\left(\frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = -\frac{4}{\alpha\beta} - 1$$

となる。これに①②を代入して計算すると p は以下のように求まる。

$$\frac{2(-p)}{p+1} = -\frac{4}{p+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow 4 + (p+1) - 2p = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 5$$

このとき $\alpha + \beta = -5$, $\alpha\beta = 6$ となり、これらを④に代入して、q は

$$q = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{2}{\beta} + 1 = \frac{4}{6} + 1 = \frac{5}{3}$$

と求まる。

【問 3】

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

【問 3】

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$

$$(\text{答}) \quad p = 5$$