

1

(1)

(i)

x について10を底とした対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{60} &= 60 \cdot \log_{10} 2 \\ &= 60 \cdot 0.3010 \\ &= 18.06\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}18 &< \log_{10} 2^{60} < 19 \\ \Leftrightarrow \log_{10} 10^{18} &< \log_{10} 2^{60} < \log_{10} 10^{19}\end{aligned}$$

となる。ここで底 >1 より

$$10^{18} < 2^{60} < 10^{19}$$

である。

よって、 x は19桁の数である。

(答) 19桁

(ii)

$$\begin{aligned}\log_{10} \frac{1}{2^{60}} &= -60 \cdot \log_{10} 2 \\ &= -18.06\end{aligned}$$

であるから、(i)と同様にして

$$\begin{aligned}-19 &< \log_{10} \frac{1}{2^{60}} < -18 \\ \Leftrightarrow 10^{-19} &< \frac{1}{2^{60}} < 10^{-18}\end{aligned}$$

である。

よって、 $\frac{1}{x}$ は小数点以下19桁に初めて0ではない数が出てくる。

(答) 19桁め

(2)

$$\begin{aligned}a_k &= 3(10^0 + 10^1 + \cdots + 10^{k-1}) \\ &= 3 \cdot \frac{10^k - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{10^k - 1}{3}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{10^k - 1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right) \\ &= \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{27}\end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $a_k = \frac{10^k - 1}{3}, S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{27}$

(1)

$t=0$ のとき、点 T における C への垂線の方程式は $x=0$ である。

$t \neq 0$ のとき、 $y' = 2x$ より点 T における C への垂線の傾きは

$$-\frac{1}{2t}$$

となるから、求める垂線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2t}(x-t) + t^2 \\ &= -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

(答) $t=0$ のとき $x=0$

$$t \neq 0 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2t}x + t^2 + \frac{1}{2}$$

(2)

点 A からひいた C への垂線は $x=0$ と一致しないので、その方程式は①の形で表されるはずである。よって、①で表される垂線が点 A を通るとき、

$$\begin{aligned} \frac{15}{2} &= \frac{6}{t} + t^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow t^3 - 7t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t-2)(t+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 1, 2, -3 \end{aligned}$$

が成り立つ。これをそれぞれ①に代入することで、垂線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}, y = \frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$

と求まる。

$$(答) \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}, y = \frac{1}{6}x + \frac{19}{2}$$

(3)

[1] $p=0$ のとき

方程式 $x=0$ は点 B からひいた垂線となるので、これ以外に 2 本の垂線 ($t \neq 0$) をもつことになる。これは、①式に $B(0, q)$ を代入して得られた方程式

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2t} \cdot 0 + t^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow t^2 &= q - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が異なる 2 つの実数解をもつことと同値なので、

$$\begin{aligned} q - \frac{1}{2} &> 0 \\ \Leftrightarrow q &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が点 B から C への垂線が 3 本ひけるための必要十分条件となる。

[2] $p \neq 0$ のとき

式 $x=0$ は垂線とはならないから、点 $B(p, q)$ から C への垂線 ($t \neq 0$) が 3 本ひけることは、

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{2t}p + t^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2t^3 + (1-2q)t - p &= 0 \end{aligned}$$

を t の 3 次方程式とみなしたときに異なる 3 つの実数解をもつことと同値である。こ

こ

$$f(t) = 2t^3 + (1-2q)t$$

とおくと、3 次方程式は $f(t) = p$ と書きかえられる。3 次方程式 $f(t) = p$ が異なる 3 つの

実数解をもつためには、関数 $f(t)$ が極小と極大をとる、すなわち、方程式

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6t^2 + (1-2q) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{2q-1}{6} \end{aligned}$$

が異なる 2 実数解をもつ必要がある。よって、

$$\begin{aligned} \frac{2q-1}{6} &> 0 \\ \Leftrightarrow q &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つことが、 $f(t) = p$ が異なる 3 実数解をもつには必要である。この条件をみたすとき、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6t^2 + 1 - 2q \\ &= 6 \left(t - \sqrt{\frac{2q-1}{6}} \right) \left(t + \sqrt{\frac{2q-1}{6}} \right) \end{aligned}$$

より、 $f(t)$ の増減は下表のようになる。ただし、 $t_0 = \sqrt{\frac{2q-1}{6}}$ とおいた。

t	$\cdots$	$-t_0$	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき、 $t_0^2 = \frac{2q-1}{6}$ が成り立つことを用いて計算すると、極大値は

$$\begin{aligned} f(-t_0) &= -2t_0^3 - (1-2q)t_0 \\ &= -2 \cdot \frac{2q-1}{6} \cdot t_0 - (1-2q)t_0 \\ &= \frac{2}{3}(2q-1)t_0 \\ &= \frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} \end{aligned}$$

と求まり、同様にして極小値も

$$f(t_0) = -\frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}}$$

と求まる。よって、方程式 $f(t) = p$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は

$$-\frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} < p < \frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} \quad (\text{ただし } p \neq 0)$$

が成り立つことである。

以上[1],[2]より、点 B から C への垂線が 3 本ひけるとときに p, q が満たすべき必要十分条件は

$$-\frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} < p < \frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} \quad \text{かつ} \quad q > \frac{1}{2}$$

である。

$$(答) \quad -\frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} < p < \frac{2}{3}(2q-1)\sqrt{\frac{2q-1}{6}} \quad \text{かつ} \quad q > \frac{1}{2}$$

(1)

$n=3$ のとき, A が優勝する場合の勝敗パターンは,

AAA
AABA
ABAA
BAAA
AABBA
ABABA
ABBAA
BABAA
BBAAA
BAABA

である。

(答) 上記の通り

(2)

(1)の各場合より求める確率は

$$\begin{aligned} & p^3 + p^3 \cdot q \cdot 3 + p^3 \cdot q^2 \cdot 6 \\ &= p^3 (1 + 3q + 6q^2) \end{aligned}$$

である。

(答) $p^3 (1 + 3q + 6q^2)$

(3)

(1)と同様に考えて, B が 0 勝のとき AAAA の 1 通りである。

B が 1 勝のときは, 最後の試合を除いた 4 試合の結果である A, A, A, B を並べ替えればよいから

$$\frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \text{ 通り}$$

である。

同様にして B が 2 勝, 3 勝のときは

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ 通り}$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ 通り}$$

である。以上より, A が優勝する場合の勝敗パターンは

$$1 + 4 + 10 + 20 = 35 \text{ 通り}$$

であり, A が優勝する確率は,

$$\begin{aligned} & p^4 + p^4 \cdot q \cdot 4 + p^4 \cdot q^2 \cdot 10 + p^4 \cdot q^3 \cdot 20 \\ &= p^4 (1 + 4q + 10q^2 + 20q^3) \end{aligned}$$

となる。

(答) パターンの総数: 35 通り

優勝する確率: $p^4 (1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$

(1)

H は平面 α 上の点であるから、実数 s_0, t_0 を用いて

$$\overline{OH} = s_0 \overline{OA} + t_0 \overline{OB}$$

のように表せる。線分 QH が平面 α と垂直であることから、 $\overline{QH} \perp \overline{OA}$ かつ $\overline{QH} \perp \overline{OB}$ である。このとき

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{QH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot (s_0 \overline{OA} + t_0 \overline{OB} - \overline{OQ}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2s_0 - a \\ 2t_0 - b \\ s_0 + t_0 - c \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5s_0 + t_0 - 2a - c &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{OB} \cdot \overline{QH} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{OB} \cdot (s_0 \overline{OA} + t_0 \overline{OB} - \overline{OQ}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2s_0 - a \\ 2t_0 - b \\ s_0 + t_0 - c \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow s_0 + 5t_0 - 2b - c &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{5a - b + 2c}{12} \\ t_0 &= \frac{-a + 5b + 2c}{12} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= s_0 \overline{OA} + t_0 \overline{OB} \\ &= \frac{5a - b + 2c}{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-a + 5b + 2c}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5a - b + 2c \\ -a + 5b + 2c \\ 2a + 2b + 2c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、点 H の座標は

$$H \left(\frac{5a - b + 2c}{6}, \frac{-a + 5b + 2c}{6}, \frac{a + b + c}{3} \right)$$

と表せる。

$$(答) \quad H \left(\frac{5a - b + 2c}{6}, \frac{-a + 5b + 2c}{6}, \frac{a + b + c}{3} \right)$$

(2)

点 D は z 軸上にあるので $D(0, 0, z)$ とおける。点 C, D から平面 α に下ろした垂線の足をそれぞれ H_c, H_D とおくと、四面体 $OABC$ と四面体 $OABD$ の体積が等しくなるとき、

$$|\overline{CH_c}| = |\overline{DH_D}|$$

が成り立つ。(1)の結果に $a=3, b=3, c=-3$ や $a=0, b=0, c=z$ を代入することで

$$\begin{aligned} H_c &(1, 1, 1) \\ H_D &\left(\frac{z}{3}, \frac{z}{3}, \frac{z}{3} \right) \end{aligned}$$

と求まる。このとき

$$\begin{aligned} \overline{CH_c} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overline{DH_D} &= \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} |\overline{CH_c}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{6} \\ |\overline{DH_D}| &= \frac{|z|}{3} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \frac{|z|}{3} \sqrt{6} \end{aligned}$$

である。 $|\overline{CH_c}| = |\overline{DH_D}|$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{6} &= \frac{|z|}{3} \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow |z| &= 6 \\ \therefore z &= \pm 6 \end{aligned}$$

となり、

$$D(0, 0, \pm 6)$$

と求まる。

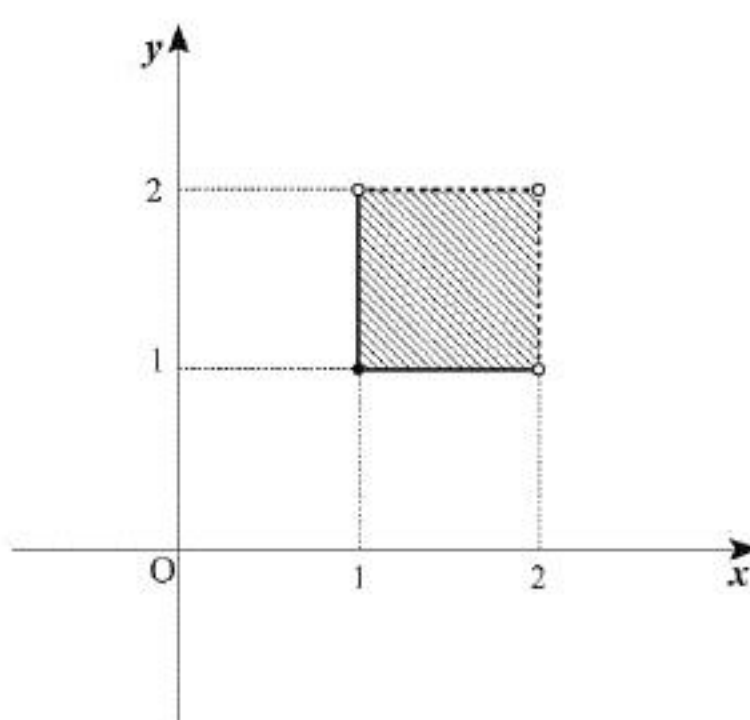
$$(答) \quad D(0, 0, \pm 6)$$

(1)

$$[x]=1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

$$[y]=1 \Leftrightarrow 1 \leq y < 2$$

より、これらが表す領域は下図の斜線部のようにになる。ただし、実線および黒丸は含み、点線および白丸は含まない。



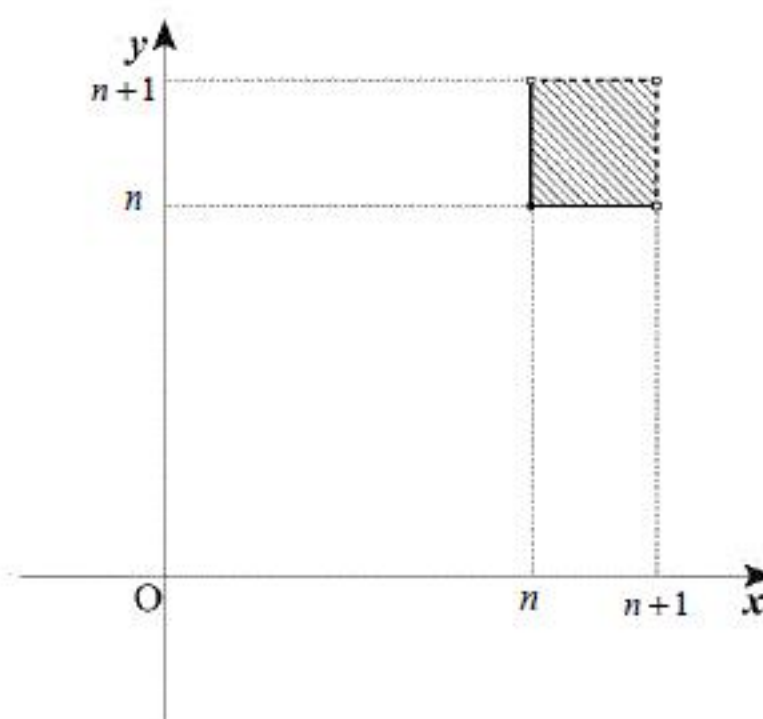
(答) 前図 (実線, 黒丸は含み, 点線, 白丸は含まない)

(2)

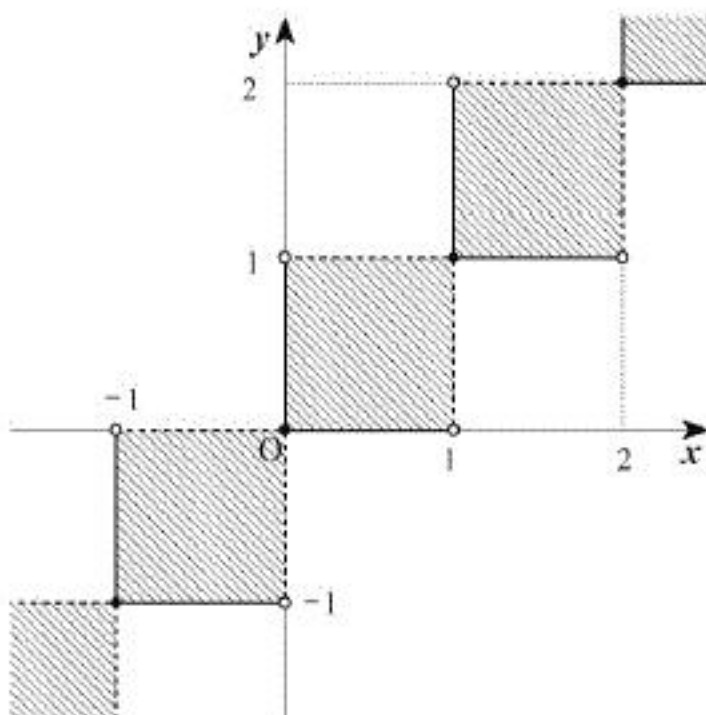
(1)と同様に考えると、等式

$$[y]=[x]=n$$

が満たす領域は下図の斜線部のようにになる (n は整数)。ただし、実線および黒丸は含み、点線および白丸は含まない。



n にすべての整数をとらせることを考えると、等式 $[y]=[x]$ が表す領域は下図の斜線部のようになる。ただし、実線、黒丸は含み、点線、白丸は含まない。



(答) 前図 (実線, 黒丸は含み, 点線, 白丸は含まない)

(3)

領域 A において、整数 n に対して

$$[x]=n \text{ かつ } [y]=-n+2$$

が成り立つ。2式から n を消去して、領域 A を表す等式を求めると

$$[y]=-[x]+2$$

となる。

(答) $[y]=-[x]+2$