

1

(1)

$$x^3 - \frac{3}{4}x + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -x^3 + \frac{3}{4}x$$

であるので $x^3 - \frac{3}{4}x + a = 0$ の解の数は $y = a$ と $y = -x^3 + \frac{3}{4}x$ の交点の数に等しい。ここで

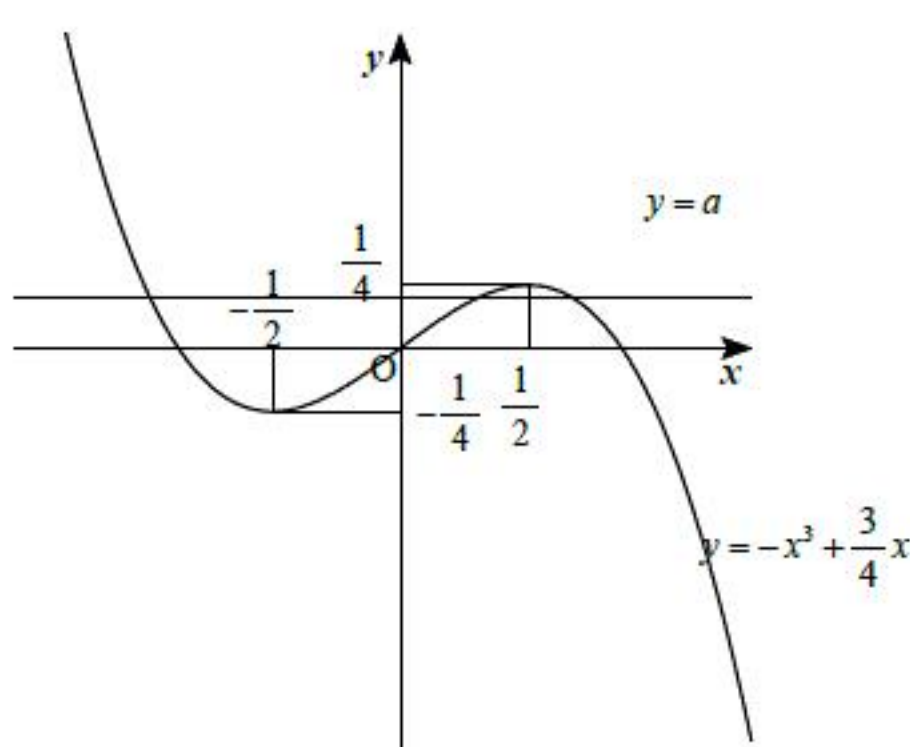
$$y = -x^3 + \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow y' = -3x^2 + \frac{3}{4} = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

となる。したがって増減表を書くとなつたようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

この増減表を元に $y = -x^3 + \frac{3}{4}x$ のグラフを書くとなつたようになる。

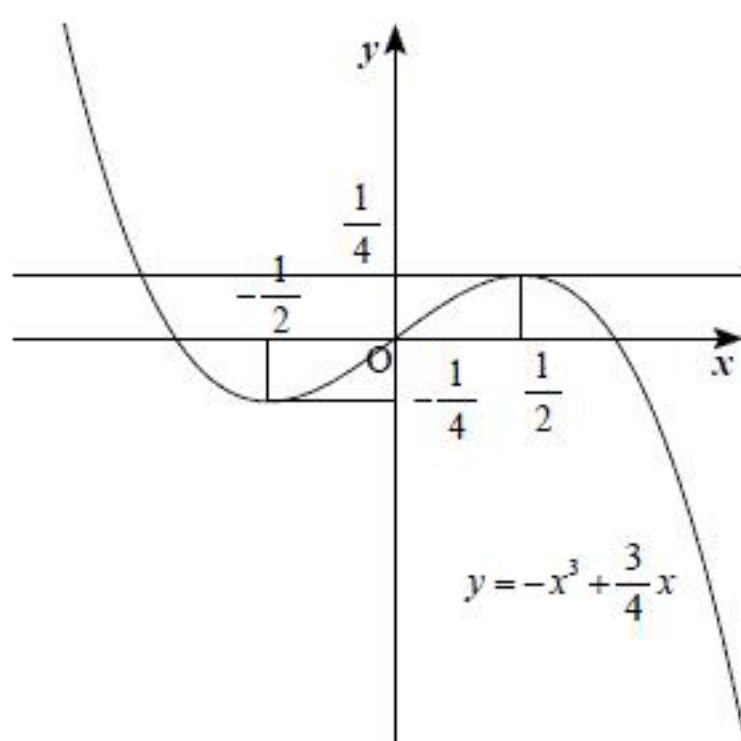


上図から解の数が3個であるための a の範囲は、 $y = a$ と $y = -x^3 + \frac{3}{4}x$ の交点の数が3個である

必要があるため $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$ である。

(答) $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$

(2)

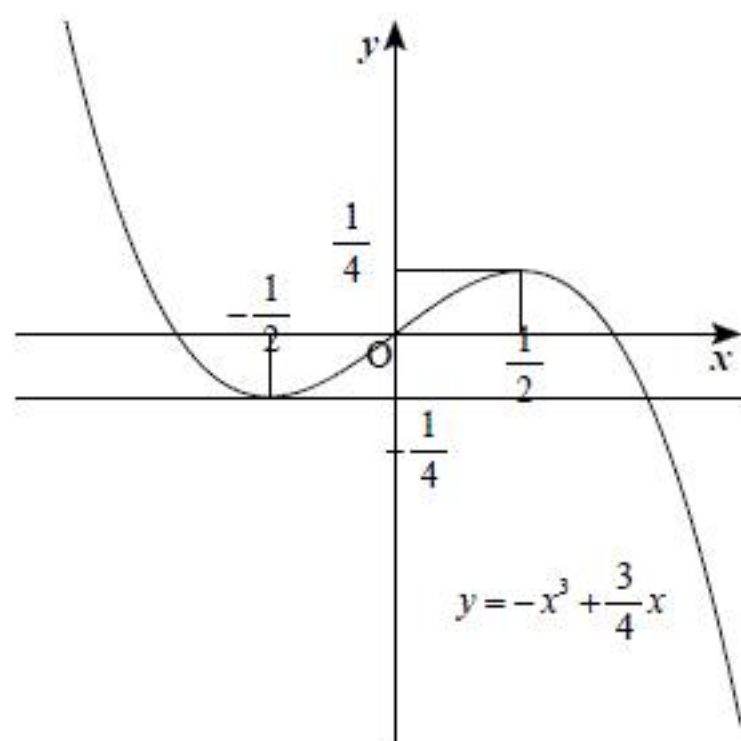


最小の解は、 $a = \frac{1}{4}$ のときの2つの解のうち小さいものより大きい。 $a = \frac{1}{4}$ のとき

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

となるので最も小さい解は -1 である。3つの実数解はこれより大きい。



最大の解は、 $a = -\frac{1}{4}$ のときの2つの解のうち大きいものより小さい。 $a = -\frac{1}{4}$ のとき

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

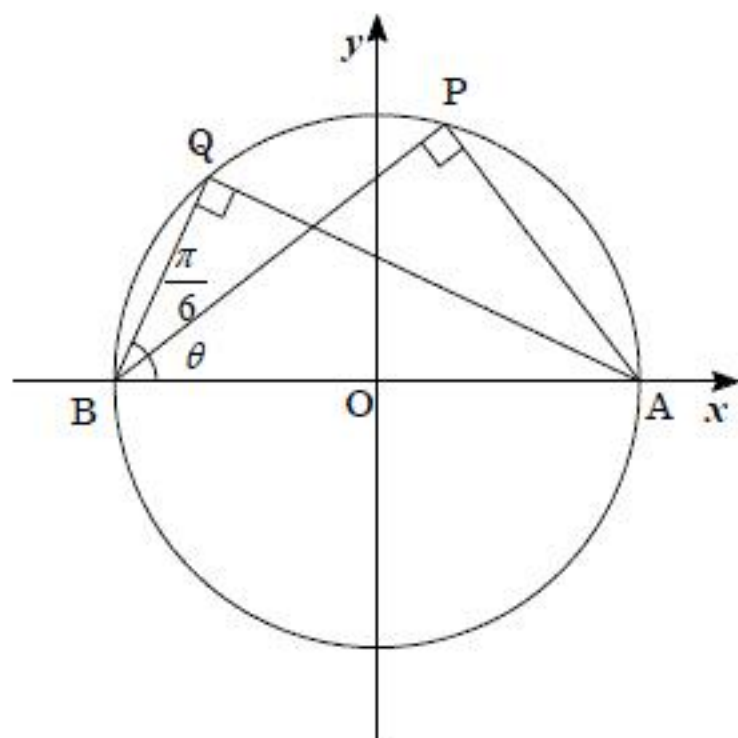
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

となるので最も小さい解は 1 である。3つの実数解はこれより小さい。

以上から3つの実数解の絶対値が 1 より小さいことが示された。

(証明終)

(1)



$\triangle BPA$ は $AB=2$ かつ $\angle PBA=\theta$ なので

$$p=2\cos\theta$$

となる。また $\triangle BQA$ は $AB=2$ かつ $\angle ABQ=\theta+\frac{\pi}{6}$ なので

$$q=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p=2\cos\theta, \quad q=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

(2)

$$\begin{aligned} pq &= 4\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 4\cos\theta\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+2\cos^2\theta \\ &= \sqrt{3}\sin 2\theta+1+\cos 2\theta \\ &= 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1 \end{aligned}$$

となる。 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$ となるので、 pq は

$$\begin{aligned} 2\theta+\frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

のとき最大値

$$\begin{aligned} 4\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) &= 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta=\frac{\pi}{6} \text{ のとき最大値 } 3$$

3

(1)

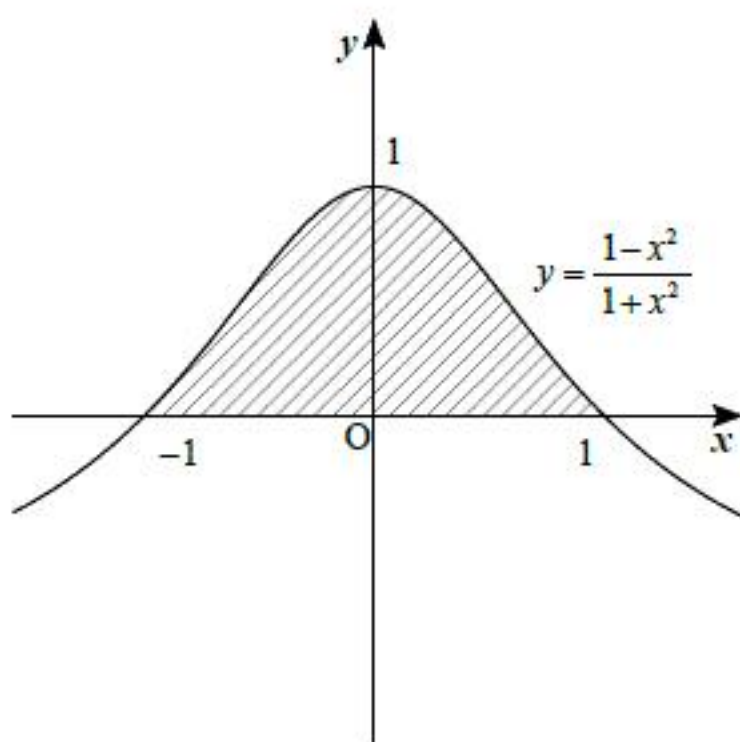
$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

から増減表を書くと以下のようになる。

x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y	↗	0	↗	1	↘	0	↘

増減表から求める面積は以下の斜線部の面積となる。



以上から求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{-(1+x^2)+2}{1+x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(-1 + \frac{2}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 -dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= -[x]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx \\ &= -2 + \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

となる。ここで $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

x	-1	→	1
t	$-\frac{\pi}{4}$	→	$\frac{\pi}{4}$

となるので

$$\begin{aligned} -2 + \int_{-1}^1 \frac{2}{1+x^2} dx &= -2 + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1+\tan^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= -2 + 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt \\ &= -2 + 2 \left[t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -2 + \pi \end{aligned}$$

となる。以上から求める面積は $-2 + \pi$ となる。

(答) $-2 + \pi$

(2)

$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow y + yx^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow (1+y)x^2 = 1-y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1-y}{1+y}$$

となる。また求める体積は(1)の図の $x \geq 0$ の部分を y 軸の周りに一回転した立体の体積となる。したがって求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^1 \frac{1-y}{1+y} dy &= \pi \int_0^1 \frac{-(1+y)+2}{1+y} dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{1+y} \right) dy \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ -1 + \frac{2(1+y)'}{1+y} \right\} dy \\ &= \pi \left[-y + 2 \log(1+y) \right]_0^1 \\ &= \pi(-1 + 2 \log 2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi(-1 + 2 \log 2)$

(1)

 $E = P + Q$ に左から P をかけると

$$\begin{aligned} P &= P^2 + PQ \\ &= P^2 \end{aligned}$$

となる。ただし $PQ = O$ を用いた。したがって $P^2 = P$ が示せた。また $E = P + Q$ に右から Q をかけると

$$\begin{aligned} Q &= PQ + Q^2 \\ &= Q^2 \end{aligned}$$

となる。ただし $PQ = O$ を用いた。したがって $Q^2 = Q$ が示せた。また $E = P + Q$ に左から Q をかけると

$$Q = QP + Q^2$$

となる。 $Q^2 = Q$ から $QP = O$ となる。以上から題意は示せた。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} E = P + Q \\ A = 2P + Q \end{cases} \\ &\Rightarrow A = 2P + E - P = P + E \\ &\Leftrightarrow P = A - E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。また

$$Q = E - P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} A^2 &= (2P + Q)^2 \\ &= 4P^2 + 2PQ + 2QP + Q^2 \\ &= 4P^2 + Q^2 \\ &= 4P + Q \end{aligned}$$

から $A^n = 2^n P^n + Q$ と推測できる。以下数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

問題文から $A = 2P + Q$ なので成立する。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定すると

$A^k = 2^k P^k + Q$ が成立する。ここで

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= (2^k P^k + Q)(2P + Q) \\ &= 2^{k+1} P^{k+1} + 2^k P^k Q + 2PQ + Q^2 \\ &= 2^{k+1} P^{k+1} + Q^2 \\ &= 2^{k+1} P^{k+1} + Q \end{aligned}$$

となる。したがって $n=k+1$ でも成立する。

以上から $A^n = 2^n P^n + Q$ となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = 2^n P^n + Q^n$$

(1)

1回の試行で白玉が出る確率は $\frac{1}{3}$ ，黒玉が出る確率は $\frac{2}{3}$ である。2回の試行で2回とも白玉が出る確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

である。以上から

$$p_2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

となる。また3回試行した際に、1, 2回目または2, 3回目に白玉，それ以外で黒玉が出る確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

となる。また3回とも白玉が出る確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

となる。以上から

$$p_3 = 1 - \left(2 \cdot \frac{2}{27} + \frac{1}{27}\right) = \frac{22}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_2 = \frac{8}{9}, \quad p_3 = \frac{22}{27}$$

(2)

$n+1$ 回目に取り出して白玉が2回以上続くことはなく，かつ $n+1$ 回目の玉の色が黒であるためには， n 回目まで取り出して白玉が2回以上続くことはなく，かつ $n+1$ に黒玉を取り出せばよい。ここで $p_n = a_n + b_n$ から

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + b_n)$$

となる。また $n+1$ 回目に取り出して白玉が2回以上続くことはなく，かつ $n+1$ 回目の玉の色が白であるためには， n 回目まで取り出して白玉が2回以上続くことはなく，かつ n 回目に取り出した玉の色が黒で $n+1$ に白玉を取り出す必要がある。したがって

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + b_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$$

(3)

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}(a_n + b_n) + \frac{1}{3}a_n \\ &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ &= \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{9}p_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{2}{9}p_{n-1}$$

(4)

数学的帰納法で証明する。

[1] $n=2$ のとき

(1)から $p_2 = \frac{8}{9}$ より

$$p_2 = \frac{8}{9} = \frac{72}{81} > \frac{64}{81} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

となるので成立する。

[2] $n=3$ のとき

(1)から $p_3 = \frac{22}{27}$ より

$$p_3 = \frac{22}{27} = \frac{594}{729} > \frac{512}{729} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

となるので成立する。

[2] $n=k$ ， $k+1$ のとき成立すると仮定すると

$p_k > \left(\frac{8}{9}\right)^k$ ， $p_{k+1} > \left(\frac{8}{9}\right)^{k+1}$ が成立する。ここで(3)から $p_{k+2} = \frac{2}{3}p_{k+1} + \frac{2}{9}p_k$ なので

$$\begin{aligned} p_{k+2} &> \frac{2}{3}\left(\frac{8}{9}\right)^{k+1} + \frac{2}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^k \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^k \left(\frac{16}{27} + \frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{22}{27}\left(\frac{8}{9}\right)^k \\ &= \frac{66}{81}\left(\frac{8}{9}\right)^k \\ &> \frac{64}{81}\left(\frac{8}{9}\right)^k \\ &= \left(\frac{8}{9}\right)^{k+2} \end{aligned}$$

となり $n=k+2$ でも成立する。

以上から題意は示せた。

(証明終)