

1

(1)

$$\begin{aligned}\cos \angle ACB &= \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

答 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

(2)

Hは平面ABC内にあるので

$$\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} \quad (x+y+z=1)$$

とあらわせる。ここで、OHは三角形ABCに垂直であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} &= -x + z \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= -x + 2y \\ &= 0\end{aligned}$$

より、 $x = \frac{2}{5}$ 。となり、 $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle COH &= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OH}|} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

を得る。

答 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

2

(1)

x 軸上での交点は $y=0$ を代入して

$$x = \frac{a}{3}$$

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 12}}{2}$$

となる。一方 y 軸上での交点は $x=0$ を代入して

$$y = \sqrt{a}$$

$$y = 3$$

より、 $a=9$ を得る。上式に代入して

$$\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 12}}{2} = 3$$

$$b = 4$$

を得る。

答 $a=9, b=4$

(2)

求める面積は

$$\int_0^3 (\sqrt{9-3x} - x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{2}{9}(9-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_0^3$$

$$= 6$$

答 6

である。

(1)

$$\frac{d \sin(\pi \sin x)}{dx} = \pi \cos x \cdot \cos(\pi \sin x)$$

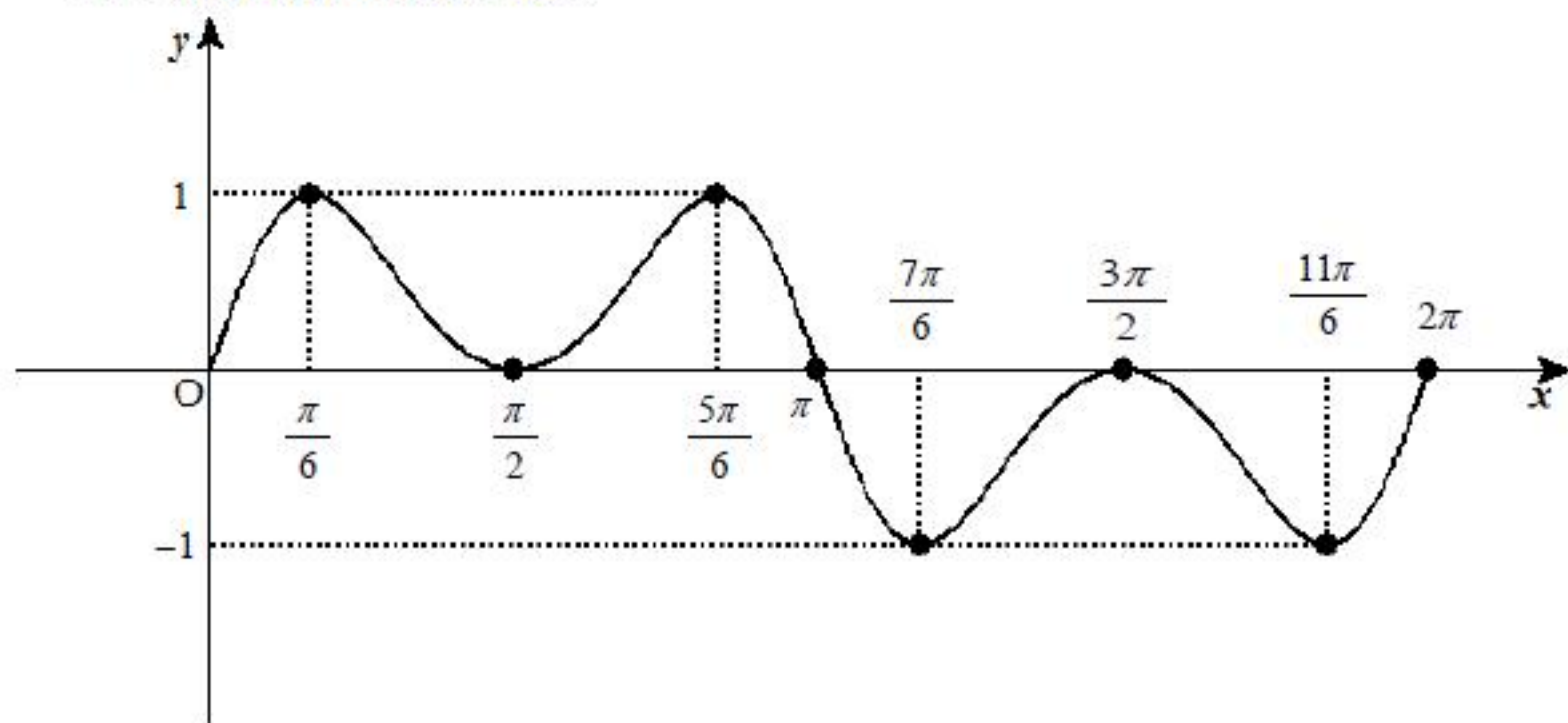
答 $\pi \cos x \cdot \cos(\pi \sin x)$

(2)

$\frac{dy}{dx} = 0$ となるのは, $x = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi, \left(n \pm \frac{1}{6}\right)\pi$ であるから, 増減表を書くと

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$		2π
y	0	↗	1	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗	0
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

より, 概形は以下ようになる。



(答) 前表, 前図

(1)

表か裏のどちらかが 1 回以下しかでない確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot (2+20) = \frac{11}{512}$$

である。よって、表と裏がともに 2 回以上でる確率は

$$1 - \frac{11}{512} = \frac{501}{512}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{501}{512}$$

(2)

$n-1$ 回目の試行で表か裏が 1 回しか出ていない確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot 2 = (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

である。 n 回目の試行で表か裏が出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから、求める確率は

$$(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

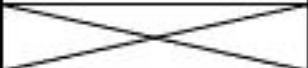
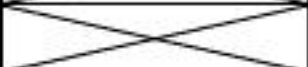
$$\text{答} \quad (n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(1)

 $f(x) = x - \log(1+x)$ とする

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

である。よって $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

以上より、 $x > -1$ のとき $f(x)$ は $x = 0$ で最小値 0 をとるので、 $f(x) \geq 0$ が成り立つ。等号成立は $x = 0$ のときである。したがって題意は示された。

(証明終)

(2)

$$p_1 = \frac{364}{365}$$

$$p_k = \frac{365-k}{365} p_{k-1}$$

である。証明は数学的帰納法によって行う。

[1]

$n=1$ のとき、(1)より

$$\log p_1 = \log \left(1 - \frac{1}{365} \right)$$

$$\leq -\frac{1}{365}$$

$$= -\frac{1(1+1)}{730}$$

となり、 $\log p_n \leq -\frac{n(n+1)}{730}$ を満たす。

[2]

$n=k$ のとき、 $\log p_k \leq -\frac{k(k+1)}{730}$ を満たすとする。 $n=k+1$ のとき、

$$\log p_{k+1} = \log \left(\frac{364-k}{365} p_k \right)$$

$$= \log \left(1 - \frac{k+1}{365} \right) + \log p_k$$

$$\leq \log \left(1 - \frac{k+1}{365} \right) - \frac{k(k+1)}{730}$$

(1)より

$$\log \left(1 - \frac{k+1}{365} \right) - \frac{k(k+1)}{730} \leq -\frac{k+1}{365} - \frac{k(k+1)}{730}$$

$$= -\frac{(k+2)(k+1)}{730}$$

となり、 $\log p_n \leq -\frac{n(n+1)}{730}$ を満たす。

以上[1], [2]から、数学的帰納法より $\log p_n \leq -\frac{n(n+1)}{730}$ は示された。

(証明終)