

【問 1】

(1)

まず, $a = x+1$, $b = 3(y+1)$ とおくと, $A = (x+1)^3 = a^3$, $B = 27(y+1)^3 = b^3$ と表すことができる。このとき, $A+1$ は,

$$\begin{aligned}A+1 &= a^3+1 \\&= (a+1)(a^2-a+1) \\&= \{(x+1)+1\}\{(x+1)^2-(x+1)+1\} \\&= (x+2)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

のように因数分解できる。

$$(\text{答}) (x+2)(x^2+x+1)$$

(2)

まず A, B について因数分解したあと(1)の結果を用いると, $A^2+A-AB-B$ は,

$$\begin{aligned}A^2+A-AB-B &= A(A+1)-B(A+1) \\&= (A+1)(A-B) \\&= (A+1)(a^3-b^3) \\&= (A+1)(a-b)(a^2+ab+b^2) \\&= (A+1)\{(x+1)-3(y+1)\}\{(x+1)^2+(x+1)\cdot 3(y+1)+9(y+1)^2\} \\&= (x+2)(x^2+x+1)(x-3y-2)(x^2+9y^2+3xy+5x+21y+13)\end{aligned}$$

のように因数分解できる。

$$(\text{答}) (x+2)(x^2+x+1)(x-3y-2)(x^2+9y^2+3xy+5x+21y+13)$$

【問 2】

与えられた不等式はそれぞれ,

$$3n+20 \geq 7n-5 \Leftrightarrow n \leq \frac{25}{4}$$

$$-n+1 > 3(3-2n) \Leftrightarrow n > \frac{8}{5}$$

のように同値変形できるので、 n が満たすべき不等式は,

$$\frac{8}{5} < n \leq \frac{25}{4}$$

となる。よって、この不等式を満たす自然数 n は,

$$n = 2, 3, 4, 5, 6$$

である。

(答) $n = 2, 3, 4, 5, 6$

【問 3】

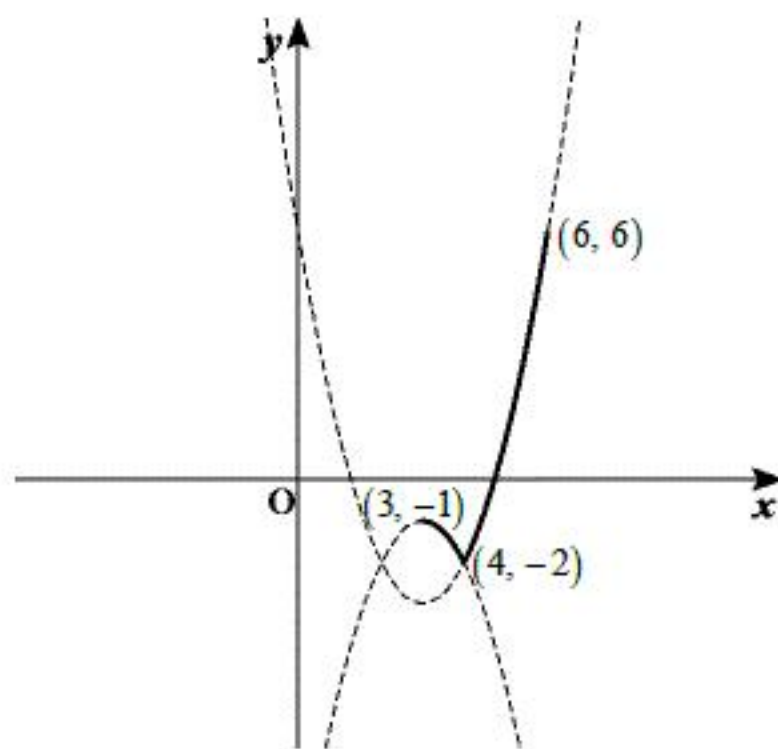
(1)

$3 \leq x \leq 6$ の範囲において、

$$y = -x^2 + 6x - 10 \quad (3 \leq x \leq 4)$$

$$y = x^2 - 6x + 6 \quad (4 \leq x \leq 6)$$

となる。よってこのグラフを描くと、次図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)の図より、 $x=6$ で最大値 6 、 $x=4$ で最小値 -2 をとる。

(答) $x=6$ のとき最大値 6 、 $x=4$ のとき最小値 -2

【問4】

△ABCに正弦定理を適用すると、

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} BC &= AB \frac{\sin(180^\circ - 45^\circ - 75^\circ)}{\sin 45^\circ} \\ &= 300 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 150\sqrt{6} \end{aligned}$$

と求まる。よって求める高さPCは、△PBCに注目することで、

$$\begin{aligned} PC &= BC \tan 30^\circ \\ &= 150\sqrt{6} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 150\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $150\sqrt{2}$

【問 5】

(1)

「英語が 80 点未満の生徒の集合」と「数学が 80 点未満の生徒の集合」はそれぞれ、 $\bar{A}$, $\bar{B}$ と表すことができる。求める集合は、「(英語が 80 点未満) または (数学が 80 点未満) の生徒の集合」であるから、 $\bar{A} \cup \bar{B}$ と表すことができる。

(答) $\bar{A} \cup \bar{B}$

(2)

「(英語が 80 点未満)かつ(数学が 80 点未満)の生徒の集合」であるから、求める集合は $\bar{A} \cap \bar{B}$ と表すことができる。

(答) $\bar{A} \cap \bar{B}$

(3)

「(英語が 80 点以上)かつ(数学が 80 点未満)の生徒の集合」であるから、求める集合は $A \cap \bar{B}$ と表すことができる。

(答) $A \cap \bar{B}$