

平成23年度 理学部 入学試験

数 学

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
- 2 この冊子の問題は、1 ページから 2 ページまで印刷されている。
- 3 解答冊子には受験番号がすでに記入してあるので、その番号が**自分の受験番号と一致することを確認すること**。万一自分の受験番号と異なる場合には、手を挙げて監督者に知らせること。
- 4 解答冊子の表紙の所定の欄に、**志望学科名（2 箇所）と氏名**を記入すること。
- 5 解答は解答冊子の所定の欄に記入すること。各問題ごとに解答用紙と下書き用紙とがあるので注意すること。
- 6 下書き用紙に記入したものは、消さずに残しておくこと。
- 7 試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- 8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 3次方程式 $x^3 - \frac{3}{4}x + a = 0$ は異なる3つの実数解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) 実数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 3つの実数解はいずれも絶対値が1より小さいことを示せ。

2 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上に $A(1, 0), P, Q, B(-1, 0)$ の順に4点がある。点 P, Q の y 座標は正とし、

$$\angle ABP = \theta, \quad \angle PBQ = \frac{\pi}{6}$$

とする。線分 BP の長さを p , 線分 AQ の長さを q とするとき、次の問いに答えよ。

(1) p および q を θ を用いて表せ。

(2) 積 pq の最大値およびその時の θ の値を求めよ。

3 曲線 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ と x 軸とで囲まれた図形を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S の面積を求めよ。

(2) S を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) E は 2 次の単位行列, O は 2 次の零行列とする。2 次正方行列 P, Q が

$$(*) \quad E = P + Q, \quad PQ = O$$

を満たすとき, $P^2 = P, Q^2 = Q, QP = O$ が成り立つことを示せ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ が $(*)$ を満たす行列 P, Q を使って $A = 2P + Q$ と表せるとする。このとき, P, Q を求めよ。

(3) 上の A について A^n を上の P と Q で表せ。ただし, n は自然数とする。

5 袋の中に白玉 1 個と黒玉 2 個が入っている。袋の中から玉を 1 個取り出して袋の中に戻すことを n ($n \geq 2$) 回繰り返す。このとき, 白玉が出るのが 2 回以上続くことがない確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_2 と p_3 を求めよ。

(2) 玉を n 回取り出して白玉が 2 回以上続くことがなく n 回目が黒玉である確率を a_n とし, 玉を n 回取り出して白玉が 2 回以上続くことがなく n 回目が白玉である確率を b_n とする。 a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n の式で表せ。

(3) $n \geq 3$ のとき, p_{n+1} を p_n, p_{n-1} の式で表せ。

(4) 不等式 $p_n > \left(\frac{8}{9}\right)^n$ が成り立つことを示せ。