

(1)

(a)

命題は偽である。 $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$ とすると x, y はともに無理数であるが, $x+y=2$ は有理数である。したがって, x と y がともに無理数であることは $x+y$ が無理数であることの十分条件ではない。

(証明終)

(b)

命題は真である。命題「 $x+y$ が無理数ならば, x または y のいずれかが無理数である。」を示せばよい。この対偶が真であることを示す。すなわち, 命題「 x, y がともに無理数でないならば, $x+y$ は無理数ではない。」を示す。 x, y は無理数ではない実数なので有理数である。有理数の和は有理数であるので $x+y$ は有理数であり, 無理数ではない。したがって対偶が真であることが示されたので, 元の命題は真である。

(証明終)

(c)

命題は真である。命題「 x が有理数かつ y が無理数ならば, $x+y$ は無理数である。」を背理法を用いて示す。すなわち, $x+y$ が有理数であることを仮定して矛盾を導く。 $x+y=q$ と置く。背理法の仮定から q は有理数である。ここで, $y=q-x$ である。この等式の左辺は無理数であり, 右辺は有理数である。したがって, これは矛盾である。よって命題は真である。すなわち, x が有理数で, y が無理数であることは $x+y$ が無理数であることの十分条件である。

(証明終)

(2)

数学的帰納法を利用して, すべての正の整数 n に対して不等式 $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ が成り立つことを示す。この命題を命題 P とする。

[1] $n=1, 2$ のとき。

$$a_1 = 1 < \frac{7}{4} \text{ かつ } a_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \text{ であるので命題 P は成り立っている。}$$

[2] $n=k, k+1$ で命題 P が成り立つと仮定したとき。($k=1, 2, 3, \dots$)

漸化式と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= a_{k+1} + a_k \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} + \left(\frac{7}{4}\right)^k \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{k+2} \left\{ \frac{4}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{48}{49} \left(\frac{7}{4}\right)^{k+2} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{k+2} \end{aligned}$$

となる。したがって命題 P は $n=k+2$ でも成り立つ。

以上, [1], [2] より命題 P が示された。

(証明終)

点 $(1, 4)$ を通り、 $y = f(x)$ と接する直線の方程式を求める。 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ を通る

$y = f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= (3a^2 + 6a + 1)x - 2a^3 - 3a^2 + 7 \end{aligned}$$

である。これが $(1, 4)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} (a-2)(a+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2, -1 \end{aligned}$$

を得る。直線が3次曲線 $y = f(x)$ と1点で接し、他の1点で交わる条件は、この直線が変曲点で $y = f(x)$ と接しないことである。

$$f''(x) = 6x + 6$$

より、 $y = f(x)$ の変曲点は $(-1, f(-1))$ である。以上より、求める直線は、 $(2, f(2))$ で

$y = f(x)$ と接する直線

$$y = 25x - 21$$

である。

(答) $y = 25x - 21$

(1)

1月1日に2人が再会するのは2人が初めて着いた島が同じ場合である。対称性からAが行った島を固定して考えてよい。Bが3島のうちAが着いた島に着く確率を考えると、求める確率は $\frac{1}{3}$ である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

n 日目の午後までに2人が出会えていない確率を $P(n)$ とする。 $P(1)$ は(1)で確率を求めた事象の余事象の確率なので

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。 $n+1$ 日目の午後までに会えないのは、 n 日目の午後までに会えておらず、かつ $n+1$ 日目にA,Bが異なる島に移動した場合である。 $n+1$ 日目の2人の移動の仕方は4通りあり、そのうち2人が出会うのは n 日目に2人がいなかった島に移動する1通りのみである。よって、 n 日目の午後までに会えていないとき、 $n+1$ 日目の午後にも会えていない確率は

$$\frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

である。したがって

$$P(n+1) = \frac{3}{4}P(n)$$

である。これと $P(1) = \frac{2}{3}$ より

$$P(n) = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

である。1月2日に2人が再会する確率は

$$(1月2日までに出会えている確率) - (1月1日に会う確率)$$

であり、1月2日までに出会えている確率は全事象の確率から上記の確率を引けばよい。よって求める確率は

$$\begin{aligned} \{1 - P(2)\} - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$

(3)

求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - P(4) &= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 \\ &= \frac{23}{32} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{23}{32}$

(4)

求める確率は $P(6)$ であるので

$$\begin{aligned} P(6) &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^5 \\ &= \frac{81}{512} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{81}{512}$

(1)

 $\vec{a}, \vec{b}$ を成分表示すると

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{AP} \\ &= \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \overrightarrow{BP} \\ &= \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 + y^2 - 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x^2 + y^2 - 1$$

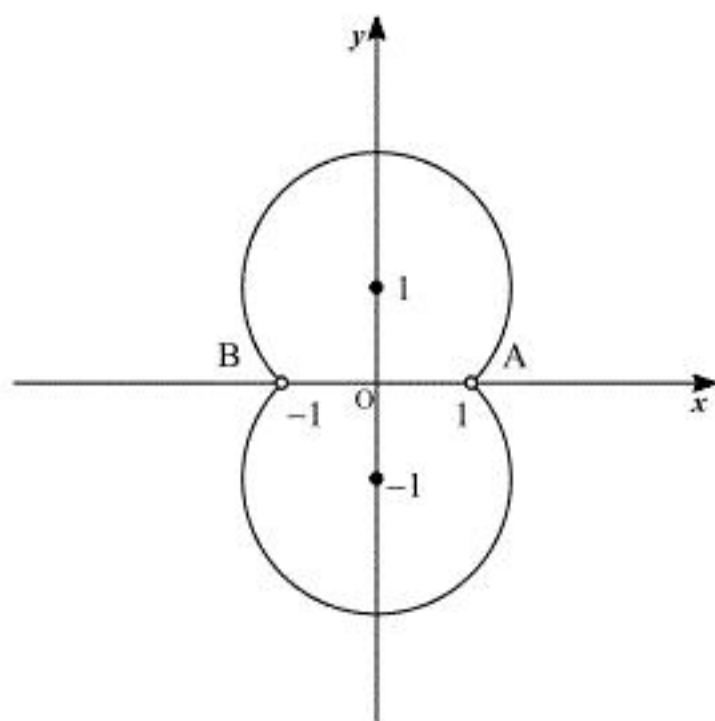
(2)

 θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度とする。ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ であるとする。(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} &= \cos 45^\circ \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \cos 45^\circ \\ \Leftrightarrow \theta &= 45^\circ\end{aligned}$$

である。したがって $\angle APB = 45^\circ$ となるような点 P の軌跡を考えればよい。対称性から点 P の軌跡は x 軸に関して対称であるので、 $y \geq 0$ の範囲で考えればよい。点 $O'(0, 1)$ とすると、 $\angle AO'B = 90^\circ$ である。したがって円周角の定理より、点 P は O' を中心とし、2 点 A, B を通る円の

$y > 0$ の部分を動く。この円の半径は $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ である。 x 軸に関する対称性に注意して求める (x, y) の集合を図示すると次の図の実線部分のようになる。ただし、2 点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ は除く。



(答) 前図

(1)

$\triangle OSV$, $\triangle ATS$, $\triangle CUT$, $\triangle BVU$ は相似な三角形である。したがって、

$$(b-t):s=(a-s):t$$

$$\Leftrightarrow t^2-bt+as-s^2=0$$

が成り立つ。これを t について解くと、

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4s(a-s)}}{2}$$

である。また、判別式 D について

$$D = b^2 - 4s(a-s)$$

$$= 4\left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - a^2$$

$$> 0 \quad (\because 0 < a < b)$$

が成り立ち、 $s > 0$, $a-s > 0$ より

$$b - \sqrt{b^2 - 4s(a-s)} > 0$$

が成り立つので、 t は正の範囲に 2 実数解を持つ。したがって、定点 S に対して、長方形 $OACB$ に内接する長方形 $STUV$ は 2 つ存在する。

(答) $t^2 - bt + as - s = 0$

(2)

(1)で求めた t に関する 2 次方程式 $t^2 - bt + as - s = 0$ の 2 解を α, β とおくと、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = b, \alpha\beta = as - s^2$$

である。長方形 $STUV$ の面積を $A(t)$ とすると

$$A(t) = ST \cdot SV$$

$$= \sqrt{\{(a-s)^2 + t^2\} \left\{s^2 + \frac{s^2(a-s)^2}{t^2}\right\}}$$

$$= \sqrt{s^2 t^2 + 2s^2(a-s)^2 + \frac{s^2(a-s)^4}{t^2}}$$

$$= \sqrt{\left\{st + \frac{s(a-s)^2}{t}\right\}^2}$$

$$= st + \frac{s(a-s)^2}{t}$$

したがって、 $t = \alpha, \beta$ に対して長方形 $STUV$ の面積の和は

$$A(\alpha) + A(\beta) = s(\alpha + \beta) + s(a-s)^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$= s(\alpha + \beta) + s(a-s)^2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= bs + s(a-s)^2 \cdot \frac{b}{s(a-s)}$$

$$= bs + b(a-s)$$

$$= ab$$

となる。よって(1)で考えた 2 つの長方形の面積の和は長方形 $OACB$ の面積に等しい。

(証明終)