

(1)

極限を取る関数を

$$h(x) = n \left\{ \sin \left(\frac{1+n}{n} x \right) + \sin \left(\frac{1-n}{n} x \right) \right\}$$

とおく。 $h(x)$ について、 x が0であるかどうかで場合分けをして調べる。[1] $x \neq 0$ のとき $h(x)$ に和積公式を用いると

$$\begin{aligned} h(x) &= 2n \sin \left(\frac{x}{n} \right) \cos x \\ &= 2x \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{\frac{x}{n}} \cdot \cos x \end{aligned}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$ であるので,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(x) \\ &= \lim_{\substack{x/n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} 2x \cdot \frac{\sin \left(\frac{x}{n} \right)}{\frac{x}{n}} \cdot \cos x \\ &= 2x \cos x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。

[2] $x = 0$ のとき n によらず $h(0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。一方、①式において $x = 0$ とすると

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \cos 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、①式は $x = 0$ のときも成立する。

以上、[1], [2]より

$$f(x) = 2x \cos x$$

である。

(答) $f(x) = 2x \cos x$

(2)

求める定積分の値を I とする。部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi f(x) dx \\ &= \int_0^\pi 2x (\sin x)' dx \\ &= [2x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x dx \\ &= [2 \cos x]_0^\pi \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_0^\pi f(x) dx = -4$

(1)

3人が1回ジャンケンをする場合の手の出し方の全事象は27通りである。このうち、3人が勝ち残っているのは次の場合である。

[1] 3人が同じ手を出すとき

このときはどの手を出すかを考えると、3通りある。

[2] 3人が全て異なる手を出すとき

この場合は、誰がどの手を出すかを考えればよいが、それは3人を1列に並べることに等しいので $3!=6$ 通りある。

以上、[1]、[2]より場合の数は $3+6=9$ 通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

である。

また、2人が勝ち残る事象の場合の数は、誰が負けるかで3通り、またそのとき何を出して負けるかで3通りあるので、 $3 \cdot 3 = 9$ 通りである。したがってこの場合の確率は、

$$\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) 3人が勝ち残っている確率： $\frac{1}{3}$ 、2人が勝ち残っている確率： $\frac{1}{3}$

(2)

1回のジャンケンで、 a 人から b 人になることを、記号 $a \rightarrow b$ で表すことにする。

(1)より $3 \rightarrow n$ となる確率は、以下の通りである。

n	3	2	1
$3 \rightarrow n$ となる確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

また、 $2 \rightarrow n$ となる確率については、 $n=2$ 、すなわち、あいこになるのが、2人が同じ手を出す場合であることから、 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ となるので、下表のようになる。

n	2	1
$2 \rightarrow n$ となる確率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

以上に注意して、問題を考える。3回でジャンケンが終わる場合の人数変化の可能性としては

$$3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

の3通りがある。それぞれについて、確率を計算すると、以下のようになる。

[1] $3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ のとき

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

となる。

[2] $3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ のとき

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

である。

[3] $3 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ のとき

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

となる。

以上、[1]、[2]、[3]より、3回で勝負が決まる確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$$

である。

(答) $\frac{5}{27}$

(3)

求める事象の余事象の確率、すなわち、

ジャンケンを n 回して、2人以上残っている確率

を求める。残り人数で場合分けをすると、

[1] 3人残っているとき

これは n 回の勝負全てがあいこである場合である。1回の勝負であいこである確率は $\frac{1}{3}$

であるから、求める確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

[2] 2人残っているとき

$m=1, 2, \dots, n$ とし、1から $m-1$ 回まで3人であいこであり、 m 回目で1人負け、 $m+1$ 回から n 回目まで2人であいこが続く場合の確率を考える。このような確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-(m+1)+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

であり、求める確率は、これを m に関して和を取ったものであるから、

$$\sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{n}{3^n}$$

となる。

以上、[1]、[2]より、ジャンケンが n 回以下で終わる確率は求めた確率の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{n}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right) = 1 - \frac{n+1}{3^n}$$

である。

(答) $1 - \frac{n+1}{3^n}$

(1)

$\triangle OPA$ において内角の和が π であることから

$$\angle OPA = \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

である。したがって正弦定理を $\triangle OPA$ に用いると

$$\begin{aligned} \frac{OP}{\sin \frac{\pi}{3}} &= \frac{1}{\sin \left\{ \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\}} \\ \therefore OP &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \left\{ \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad OP = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)}$$

(2)

$\angle QMO = \frac{\pi}{2}$, $\angle QNP = \frac{\pi}{2}$ であるので, (1) の結果と合わせると

$$QM = OQ \sin \theta$$

$$\begin{aligned} QN &= QP \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= (OP - OQ) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - OQ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} QM + QN &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow OQ \left\{ \sin \theta - \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

したがって, $0 < \theta < \theta + \frac{\pi}{3} < \pi$ に注意すれば,

$$\theta + \frac{\pi}{3} = \pi - \theta$$

であり, $\theta = \frac{\pi}{3}$ と求まる。

$$(答) \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

(1)

漸化式において $n=1$ とすると, $a_1=2$ より

$$\begin{aligned} a_2^2 - 2a_2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_2 - 3)(a_2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $a_2 > 0$ であるから, $a_2 = 3$ とわかる。同様に漸化式において $n=2$ とおくと

$$\begin{aligned} a_3^2 - 3a_3 - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_3 - 5)(a_3 + 2) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $a_3 > 0$ であるから, $a_3 = 5$ と求まる。(答) $a_2 = 3, a_3 = 5$

(2)

漸化式と, 漸化式において n を $n+1$ に置き換えた式

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - a_n^2 &= (-1)^n \\ a_{n+2}^2 - a_{n+2} a_{n+1} - a_{n+1}^2 &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

において, 辺々を足し合わせると

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_{n+1} a_{n+2} - a_n (a_n + a_{n+1}) &= 0 \\ (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)(a_{n+2} + a_n) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $a_n > 0, a_{n+2} > 0$ であるので,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

である。 $n=1$ のとき

$$a_1 = 2 < 3 = a_2$$

である。また $n=2, 3, \dots$ において $a_{n-1} > 0$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ &> a_n \end{aligned}$$

である。したがって $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

 n に関する数学的帰納法を用いて, すべての自然数 n に対し,命題 $P(n)$: a_n は自然数である。

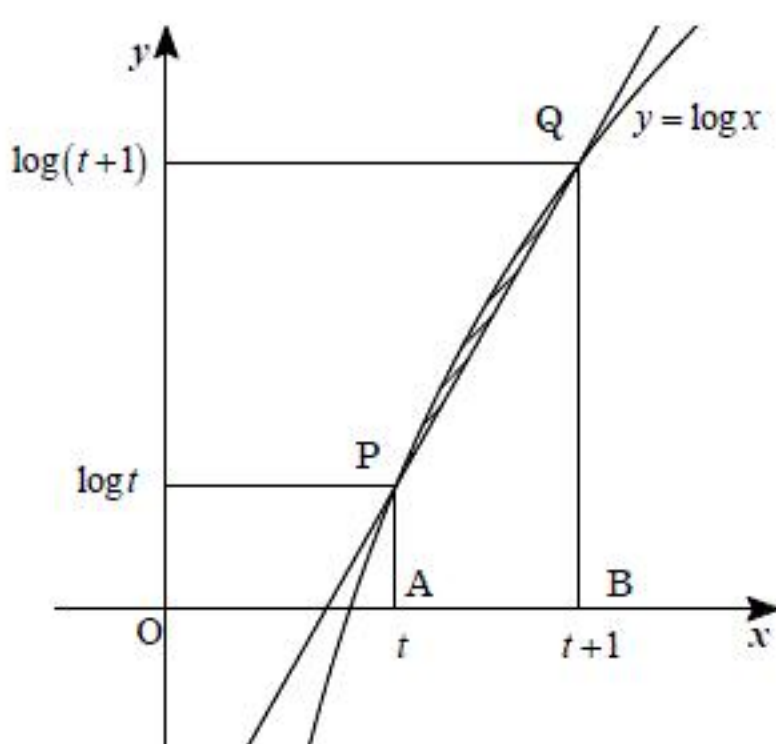
が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき $a_1 = 2, a_2 = 3$ であるので, 命題 $P(n)$ は $n=1, 2$ で成り立つ。[2] $n=k, k+1$ で命題 $P(n)$ が成り立つと仮定したとき ($k=1, 2, \dots$)(2) から $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ であるので, a_{k+1}, a_k が自然数のとき a_{k+2} も自然数, すなわち, 命題 $P(n)$ は $n=k+2$ においても成り立つ。以上, [1], [2] より命題 $P(n)$ は $n=1, 2, \dots$ で成り立つ。よって, 題意は示された。

(証明終)

(1)

$S(t)$ は下図斜線部の領域の面積である。



求める面積は、 $x=t, t+1, y=\log x, x$ 軸で囲まれた領域の面積から、台形 $ABQP$ の面積を引いた面積であるので

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_t^{t+1} \log x dx - \frac{1}{2} \{ \log(t+1) + \log t \} \\
 &= [x \log x - x]_t^{t+1} - \frac{1}{2} \{ \log(t+1) + \log t \} \\
 &= (t+1) \log(t+1) - t \log t - 1 - \frac{1}{2} \{ \log(t+1) + \log t \} \quad \dots \textcircled{1} \\
 &= \left(t + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) - 1
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S(t) = \left(t + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) - 1$$

(2)

$S(t)$ を①の式を使って微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ (t+1) \log(t+1) - t \log t - \frac{1}{2} (\log t + \log(t+1)) \right\} \\
 &= 1 + \log(t+1) - 1 - \log t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right) \\
 &= \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} S(t) &= \log 1 - \frac{1}{2} (0+0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

(3)

$f(t) = \frac{d}{dt} S(t)$ とおく。 $f(t)$ を微分すると、

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2t^2(t+1)^2} \{ 2t^2(t+1) - 2t(t+1)^2 + (t+1)^2 + t^2 \} \\
 &= \frac{1}{2t^2(t+1)^2} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

であるから、 $f(t) = \frac{d}{dt} S(t)$ は単調に増加する。(2)の結果とあわせると

$$\frac{d}{dt} S(t) < 0$$

となり、したがって、 $S(t)$ は単調に減少する。

(証明終)