

(1)

関数 $f(x)$ はすべての実数 x において連続であり、

$$f(-1) = -1 < 0$$

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = -1 < 0$$

$$f(3) = 7 > 0$$

であるから、中間値の定理により、方程式 $f(x) = 0$ の実数解が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ と $1 < x < 3$ の範囲にそれぞれ少なくとも1個ずつ存在する。ここで、方程式 $f(x) = 0$ は3次方程式であるから、実数解の個数は高々3個である。したがって、方程式 $f(x) = 0$ の実数解は、 $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ と $1 < x < 3$ の範囲にそれぞれ1個ずつのみ存在する。よって、題意は示された。

(証明終)

(2)

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ より、 $f'(0) = -1$ であるから、接線 l の方程式は、 $y = -x + 1$ である。曲線 $y = f(x)$ と接線 l の共有点の x 座標は、

$$-x + 1 = x^3 - 2x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 2$$

である。 $0 \leq x \leq 2$ のとき、 $(-x + 1) - f(x) = x^2(2 - x) \geq 0$ より、座標平面上の $0 \leq x \leq 2$ において接線 l は曲線 $y = f(x)$ よりも上側にある。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{(-x + 1) - f(x)\} dx &= \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

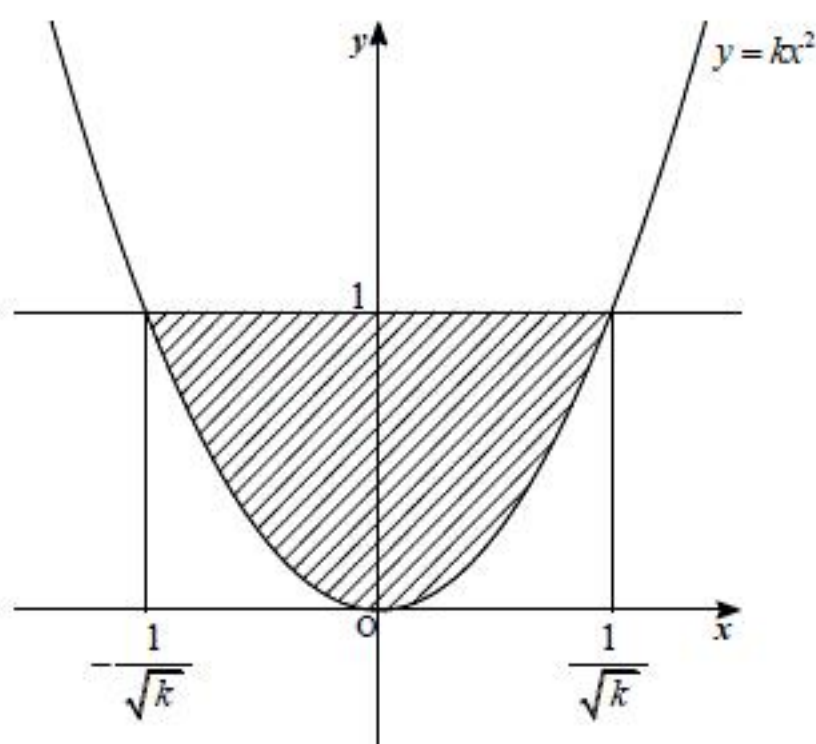
である。

(答) $\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} y = kx^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{k}}, 1 \right)$$

より、図形 D は下図の斜線部分である。



y 軸に関する対称性により、

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 \cdot \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \left\{ 1^2 - (kx^2)^2 \right\} dx \\ &= 2\pi \left[x - \frac{k^2}{5} x^5 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \\ &= \frac{8\pi}{5\sqrt{k}} \end{aligned}$$

である。 $y = kx^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{k} (\because \quad \quad \text{であるから,})$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^1 \frac{y}{k} dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2k} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2k} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ \Leftrightarrow \frac{8\pi}{5\sqrt{k}} &= \frac{\pi}{2k} \\ \Leftrightarrow \sqrt{k} &= \frac{5}{16} \\ \therefore k &= \frac{25}{256} \end{aligned}$$

である。

(答) $k = \frac{25}{256}$

(1)

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -4 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -2 \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -2 \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 A^3 &= A^2 \cdot A \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -2 \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -2 \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta & -2(\sin \theta \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos \theta) \\ \frac{1}{2}(\sin \theta \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos \theta) & \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -2 \sin 3\theta \\ \frac{1}{2} \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。(1)の結果を用いると、

$$\begin{aligned}
 A^6 &= (A^3)^2 \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 3\theta & -2 \sin 2 \cdot 3\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 3\theta & \cos 2 \cdot 3\theta \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos 6\theta & -2 \sin 6\theta \\ \frac{1}{2} \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるとき、

$$\begin{cases} \cos 6\theta = 1 \\ \sin 6\theta = 0 \end{cases}$$

である。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $0 \leq 6\theta \leq 3\pi$ であるから、

$$\begin{aligned}
 6\theta &= 0, 2\pi \\
 \therefore \theta &= 0, \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{3}$$

(1)

$g(x) = \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2} - e^x$ とおくと、 $g'(x) = ex - e^x$ 、 $g''(x) = e - e^x$ であるから、 $g'(x)$ の増減表は下のようなになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g''(x)$	+	0	-
$g'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

したがって、 $g(x)$ の増減表は下のようなになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

よって、 $x=1$ は方程式 $g(x)=0$ のただひとつの実数解である。

したがって、 $(x, y) = (1, e)$ は、連立方程式

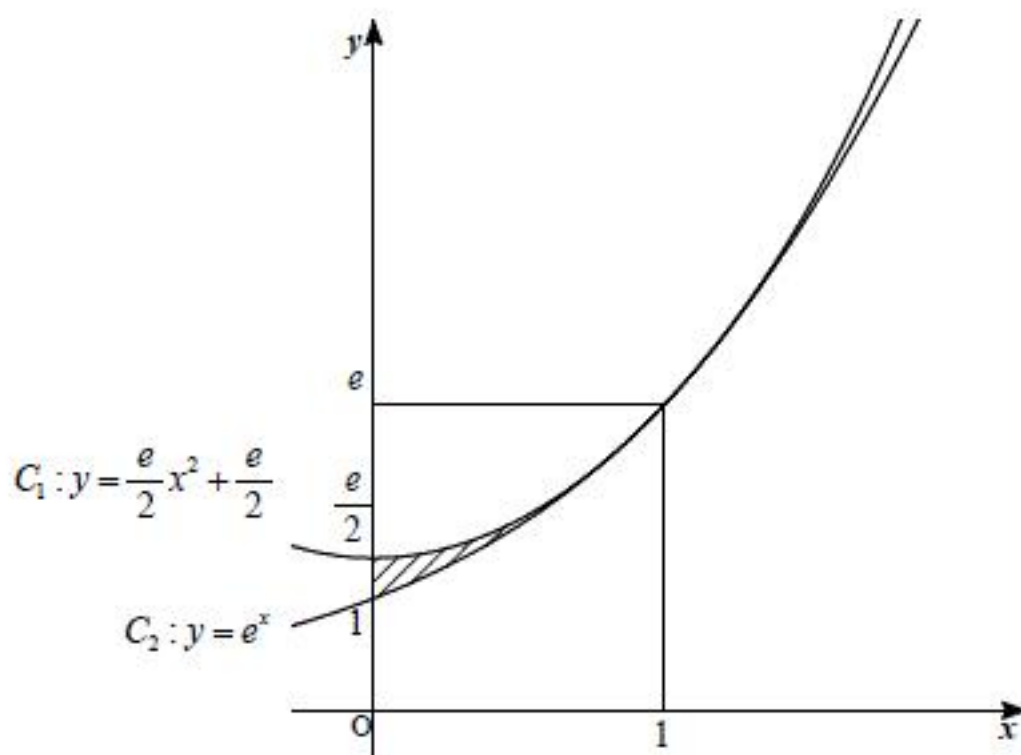
$$\begin{cases} y = \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2} \\ y = e^x \end{cases}$$

のただひとつの実数解の組であるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

(1) の考察より、曲線 C_1 、 C_2 を座標平面上に図示すると、下図のようなになる。



求める面積は、上図の斜線部分の面積であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{2} - e^x \right) dx &= \left[\frac{e}{6}x^3 + \frac{e}{2}x - e^x \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{e}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $1 - \frac{e}{3}$

(1)

点Pは双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点であるから、

$$t^2 - s^2 = 1$$

$$\therefore s = \sqrt{t^2 - 1} \quad (\because t > 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。直線PBの方程式は、

$$y = \frac{s}{t+1}(x+1) \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、直線QAの方程式は、

$$y = \frac{s}{1-t}(x-1) \quad \dots \textcircled{3}$$

である。②、③、 $t \neq 0$ より、 $(x, y) = \left(\frac{1}{t}, \frac{s}{t} \right)$ である。したがって、①を考慮して、

$$(u, v) = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (u, v) = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}} \right)$$

(2)

u, v は、関係式

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}$$

$$= \sqrt{1 - u^2}$$

$$\therefore u^2 + v^2 = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

を満たす。ただし、 $t > 1$ であるから、 u, v のとりうる値の範囲は、

$$0 < u < 1, 0 < v < 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

である。④、⑤より、求める軌跡は、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x > 0, y > 0$ を満たす部分である。

(答) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x > 0, y > 0$ を満たす部分