

【問 1】

(1)

2 次関数が 3 点 $(3, 2)$, $(4, -1)$, $(-1, -6)$ を通るとき,

$$\begin{cases} 2 = 9a + 3b + c \\ -1 = 16a + 4b + c \\ -6 = a - b + c \end{cases}$$

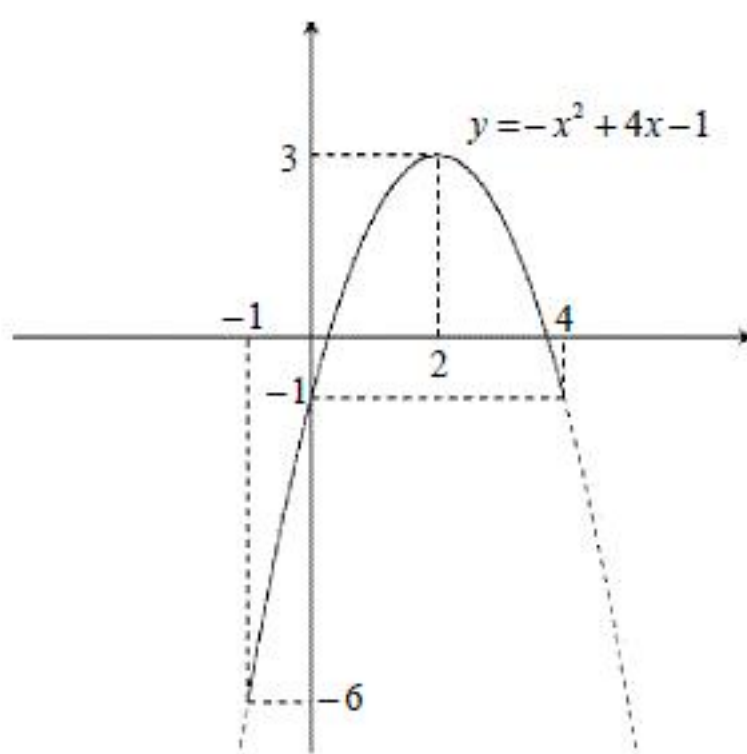
が成り立つから, これを解くと

$$a = -1, b = 4, c = -1$$

である。また, このとき

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x - 1 \\ &= -(x-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

と変形できるので, x の範囲が $-1 \leq x \leq 4$ のときグラフは下のようになる。



(答) $a = -1, b = 4, c = -1$, 上図

(2)

(1)で導いた 2 次関数のグラフを平行移動して, その頂点が直線 $y = x + 1$ ($2 < x \leq 8$) 上にあるとき, その 2 次関数は

$$y = -(x-p)^2 + p + 1 \quad (2 < p \leq 8)$$

とおくことができる。これが点 $(3, 2)$ を通るとき,

$$\begin{aligned} 2 &= -(3-p)^2 + p + 1 \\ \Leftrightarrow (p-2)(p-5) &= 0 \end{aligned}$$

である。 $2 < p \leq 8$ から $p = 5$ であることがわかり, 求める 2 次関数は

$$\begin{aligned} y &= -(x-5)^2 + 6 \\ &= -x^2 + 10x - 19 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = -x^2 + 10x - 19$

【問 2】

(1)

A が初戦から 3 連勝して優勝する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

である。

(答) $\frac{27}{125}$

(2)

A が 3 戦目までに 2 勝し, 4 戦目で優勝する確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \frac{3}{5} = \frac{162}{625}$$

である。

(答) $\frac{162}{625}$

【問 3】

(1)

四角形 ABCD は円に内接することから

$$\begin{aligned}\angle BCD &= 180^\circ - \angle DAB \\ &= 180^\circ - 110^\circ \\ &= 70^\circ\end{aligned}$$

である。さらに、弧 DB に対する円周角と中心角の関係から、

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\angle BCD \\ &= 2 \cdot 70^\circ \\ &= 140^\circ\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\alpha = 140^\circ$

(2)

$$\alpha = \angle OBC + \angle BCD + \beta$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha - (\angle OBC + \angle BCD) \\ &= 140^\circ - (30^\circ + 70^\circ) \\ &= 40^\circ\end{aligned}$$

である。

(答) $\beta = 40^\circ$

【問 4】

x, y が自然数のとき、与式は

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right) &= \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3(x-1)(y-1) &= 2xy \\ \Leftrightarrow (x-3)(y-3) &= 6\end{aligned}$$

と変形できる。 $1 \leq x < y$ より

$$-2 \leq x-3 < y-3$$

であり、また $x-3, y-3$ は整数であるから

$$\begin{aligned}(x-3, y-3) &= (1, 6), (2, 3) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (4, 9), (5, 6)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = (4, 9), (5, 6)$$