

平成 24 年度入学試験問題

数 学 (前 期)

注意事項

1. 問題は

1

 から

5

 の 5 題です.
2. 解答用紙は 5 枚です.
3. 解答は解答用紙の裏面には記入しないこと.
4. 解答用紙の裏面は計算用紙として使用してよい.
5. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること.

前期日程(経済・経営)(120分)

1 (配点率 20 %)

次の問に答えなさい.

- (1) 実数 x, y に関する以下の命題で正しいものは証明し, 誤っているものは反例をあげなさい.
- (a) x と y が共に無理数であることは $x + y$ が無理数であることの十分条件である.
- (b) x と y のいずれかが無理数であることは $x + y$ が無理数であることの必要条件である.
- (c) x が有理数で y が無理数であることは $x + y$ が無理数であることの十分条件である.
- (2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1} (n = 3, 4, 5, \dots)$ で定義する. このとき, すべての正の整数 n に対して次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

2 (配点率 20 %)

xy 平面上の点 $(1, 4)$ を通り, また, 曲線 $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7$ と 1 点で接し, 他の 1 点で交わる直線の方程式をすべて求めなさい.

3 (配点率 20 %)

互いに友人である A, B はかつて、10 年後の 1 月 1 日に、スリーアイランド国の空港で再会することを約束した。いよいよ今日が約束の 1 月 1 日である。2 人は午後、自分達の住む国からスリーアイランド国の空港に各々到着する。ところが、3 つの島から成るこの国には、各島に 1 つずつ、計 3 つの空港があり、出発の際、2 人とも行き先をこれら 3 つの島の中から等確率で選んだため、降り立った空港で 2 人が再会できるとは限らない。再会できない場合は、A も B も、再会できるまで、現在自分がいる島以外の 2 島の 1 つを等確率で選び翌日その島へ移動することを繰り返す。ただし、3 島間の移動は各島間に毎日朝 1 便だけある飛行機によるしかなく、しかも、乗り継ぎが悪いため、島間の移動は 1 日に 1 度しかできない。次の問に答えなさい。

- (1) 1 月 1 日に A, B が再会する確率を求めなさい。
- (2) 1 月 2 日にようやく A, B が再会する確率を求めなさい。
- (3) 1 月 4 日の午後までに A, B が再会できる確率を求めなさい。
- (4) 1 月 6 日の午後になっても A, B が再会できていない確率を求めなさい。

4 (配点率 20 %)

xy 平面上の点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(x, y)$ に対して、ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を各々 $\vec{a} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BP}$ と定める。次の問に答えなさい。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を x, y を用いて表しなさい。
- (2) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす点 (x, y) 全体の集合を図示しなさい。

5

(配点率 20 %)

xy 平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(0, b)$, および $C(a, b)$ ($0 < a < b$) を頂点とする長方形 $OACB$ と, 辺 OA 上の定点 $S(s, 0)$ ($0 < s < a$) を考える. 次の問に答えなさい.

- (1) 辺 AC , CB , BO 上に各々点 T , U , V を適切にとれば, 四角形 $STUV$ は長方形となる. このとき, $AT = t$ として, t が満たすべき条件を a , b , s , t を用いて表しなさい. また, 定点 S に対して, 長方形 $OACB$ に内接するこのような長方形 $STUV$ は 2 つ存在することを示しなさい.
- (2) (1) で考えた 2 つの内接する長方形の面積の和は長方形 $OACB$ の面積に等しいことを証明しなさい.

