

平成 24 年度 理学部 入学試験

数 学

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
- 2 この冊子の問題は、1 ページから 2 ページまで印刷されている。
- 3 解答冊子には受験番号がすでに記入してあるので、その番号が**自分の受験番号と一致すること**を確認すること。万一自分の受験番号と異なる場合には、手を挙げて監督者に知らせること。
- 4 解答冊子の表紙の所定の欄に、**志望学科名（2 箇所）**と**氏名**を記入すること。
- 5 解答は解答冊子の所定の欄に記入すること。各問題ごとに解答用紙と下書き用紙とがあるので注意すること。
- 6 下書き用紙に記入したものは、消さずに残しておくこと。
- 7 試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- 8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
- 9 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 実数 x に対して $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \sin \left(\frac{1+n}{n} x \right) + \sin \left(\frac{1-n}{n} x \right) \right\}$ とおく。
次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^\pi f(x) dx$ を求めよ。

2 3人でジャンケンをし、勝者がひとりになるまで繰り返す。ただし、ある回のジャンケンで負けた者は、その次の回以降は参加できないものとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 1回のジャンケンの後、3人が勝ち残っている確率、および、2人が勝ち残っている確率をそれぞれ求めよ。

(2) ちょうど3回でジャンケンが終わる確率を求めよ。

(3) ジャンケンが n 回以下で終わる確率を求めよ。

3 $\triangle OAB$ において、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$, $OA = 1$ とする。辺 AB 上に点 P があり、線分 OP 上に点 Q がある。ただし、点 P は点 A , 点 B のいずれとも異なり、点 Q は点 O , 点 P のいずれとも異なる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\angle AOP = \theta$ とおく。 OP を θ を用いて表せ。

(2) 点 Q から辺 OA , 辺 AB に下ろした垂線の足をそれぞれ M , N とする。

$QM + QN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 θ の値を求めよ。

- 4 正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があって、次を満たしているとする。

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $a_n \leq a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。

- 5 曲線 $C: y = \log x$ と y 軸に平行な 2 直線 $l: x = t$, $m: x = t + 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $t \geq 1$ とする。

- (1) C と l の交点を P , C と m の交点を Q とするとき、曲線 C と線分 PQ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ は単調に減少することを示せ。