$\boxed{1}$

(1)

$x \geqq y$ のとき

$$\frac{|x-y|}{2}=\frac{x-y}{2}$$

であり，$x<y$ のとき

$$\frac{|x-y|}{2}=-\frac{x-y}{2}$$

であるから

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}=x & (x \geqq y\ のとき) \\ \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}=y & (x<y\ のとき)\end{cases}$$

となる。よって，$f(x,\ y)=x$ のとき $x \geqq y$ となる必要があり，逆に $x \geqq y$ のとき $f(x,\ y)=x$ を満たす。従って，x，y が実数の値であるとき，$f(x,\ y)=x$ は $x \geqq y$ であるための必要十分条件である。

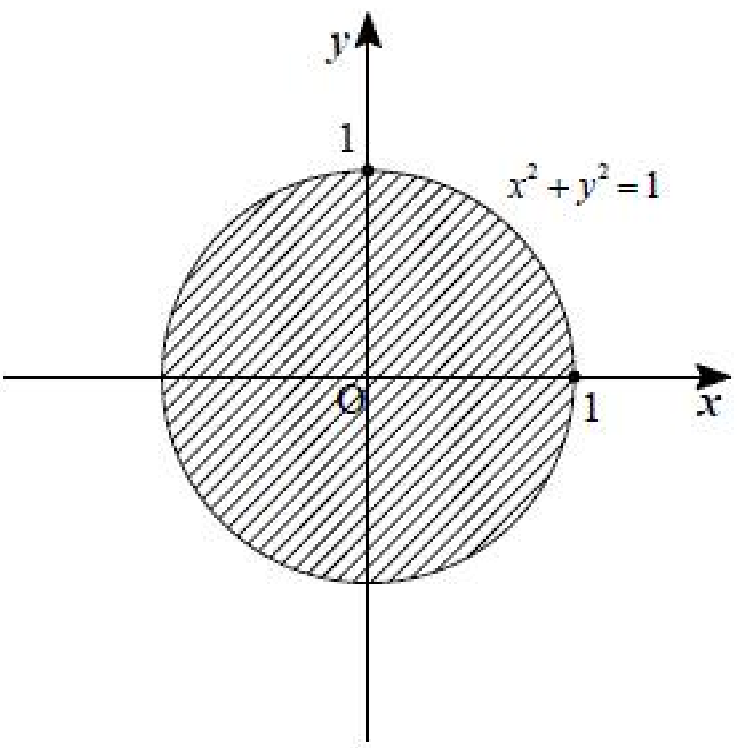
(証明終)

(2)

$g(x,\ y)=x^2+y^2-1+|x^2+y^2-1|$ とすると

$$g(x,\ y)=\begin{cases}2(x^2+y^2-1) & (x^2+y^2-1>0\ のとき) \\ 0 & (x^2+y^2-1 \leqq 0\ のとき)\end{cases}$$

となる。$x^2+y^2-1>0$ のとき $g(x,\ y)>0$ であるから，$g(x,\ y)=0$ を満たす実数 $(x,\ y)$ は存在しない。$x^2+y^2-1 \leqq 0$ のとき $g(x,\ y)=0$ であるから，$x^2+y^2-1 \leqq 0$ を満たす全ての実数 $(x,\ y)$ において $g(x,\ y)=0$ が常に成り立つ。従って，求める領域は下図の斜線部分である。但し，境界を含む。



(答) 前図

$\boxed{2}$

(1)

$f(x)=x^2+9$, $g(x)=x^2$ とすると

$$f'(x)=2x$$

である。点 $\left(t, t^2+9\right)$ における接線を $y=h(x)$ とすると

$$\begin{aligned} h(x) &= 2t\left(x-t\right)+t^2+9 \\ &= 2tx-t^2+9 \end{aligned}$$

となる。α, β は

$$g(x)=h(x)$$

すなわち

$$x^2-2tx+t^2-9=0$$

の解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2t \\ \alpha\beta=t^2-9 \end{cases}$$

と求まる。

(答) $\begin{cases} \alpha+\beta=2t \\ \alpha\beta=t^2-9 \end{cases}$

(2)

$y=g(x)$ と $y=h(x)$ とで囲まれた図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{\left(2tx-t^2+9\right)-x^2\right\}dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

と求まる。ここで，

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= 4t^2-4\left(t^2-9\right) \\ &= 36 \end{aligned}$$

であり，$\beta-\alpha>0$ より

$$\beta-\alpha=6$$

である。

従って

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\cdot 6^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

となり，題意を示せた。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

目の出方を(一回目の目, 二回目の目, …)のように記述する。このとき, 出た目の数の総和が 6 となるのは次の 3 通りである。

$(1,1,4),(1,1,1,3),(1,1,1,1,2)$

(答) $(1,1,4),(1,1,1,3),(1,1,1,1,2)$

(2)

1～4 の目が出る確率はそれぞれ$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$である。総和が 2 となるとき (2) となれば良いから

$$P_2=\frac{1}{6}$$

である。総和が 3 となるとき $(3),(1,2)$ となれば良いから

$$P_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$$

である。総和が 4 となるとき $(4),(1,3),(1,1,2)$ となれば良いから

$$P_4=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{27}$$

である。

(答) $P_2=\frac{1}{6}$, $P_3=\frac{7}{18}$, $P_4=\frac{8}{27}$

(3)

$n\geqq 5$ である事象は, $n=2,3,4$ である事象の余事象であるから求める確率は

$$1-(P_2+P_3+P_4)=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{7}{18}+\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{27}$$

と求まる。

(答) $\frac{4}{27}$

(4)

P_2,P_3,P_4 について

$$P_2<P_4<P_3$$

である。一方(3)より, 出た目の数の総和が 5 以上である確率は P_3 よりも小さい。

すなわち, 5 以上の n について

$$P_n<\frac{4}{27}<P_3$$

であるから, P_n が最大となるのは

$$n=3$$

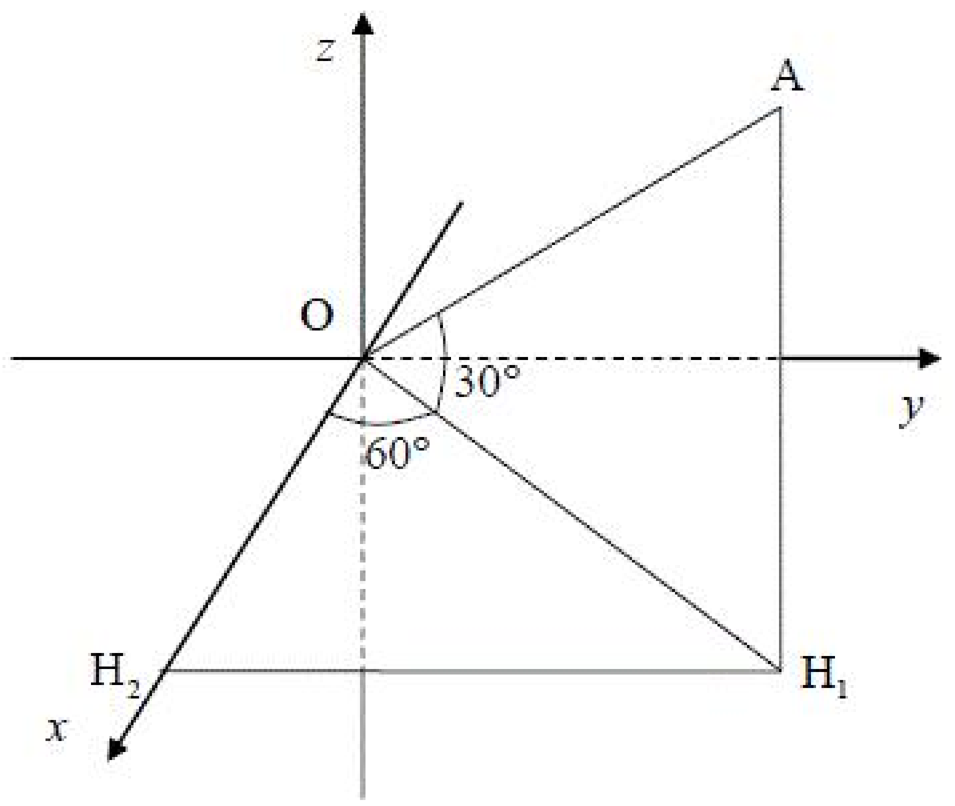
のときである。

(答) $n=3$

$\boxed{4}$

(1)

Aから xy 平面に下ろした垂線の足を H_1 とし，H_1 から x 軸に下ろした垂線の足を H_2 とする。



$\triangle OAH_1$ において $\angle AOH_1 = 30°$ であるから

$$\begin{cases} OH_1 = OA\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ AH_1 = OA\sin 30° = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

となる。さらに，$\triangle OH_1H_2$ において $\angle H_1OH_2 = 60°$ であるから

$$\begin{cases} OH_2 = OH_1\cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ H_1H_2 = OH_1\sin 60° = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

となる。よって，点 $A(x_1, y_1, z_1)$ とすると

$$(x_1, y_1, z_1) = (OH_1, H_1H_2, AH_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。同様にして，点 $B(x_2, y_2, z_2)$ についても

$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

と求めることができる。

(答) 点 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$，点 $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{3}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$

(2)

地球表面 S 上の東経が135° であり，かつ，平面 α 上にある点を $C(x_3, y_3, z_3)$ とする。

点Cは東経が135° の点であるから

$$(x_3, y_3, z_3) = (\cos\theta\cos 135°, \cos\theta\sin 135°, \sin\theta) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \sin\theta\right)$$

と表せる。また，点Cは平面 α 上の点であるから s, t を実数として

$$(x_3, y_3, z_3) = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}(s+t), \frac{3}{4}(s-t), \frac{1}{2}(s-t)\right)$$

と表せる。従って，点Cは同一の点であるから

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(s+t) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta = \dfrac{3}{4}(s-t) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}(s-t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}(s-t) \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2}(s-t) \\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

と求まる。

(答) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

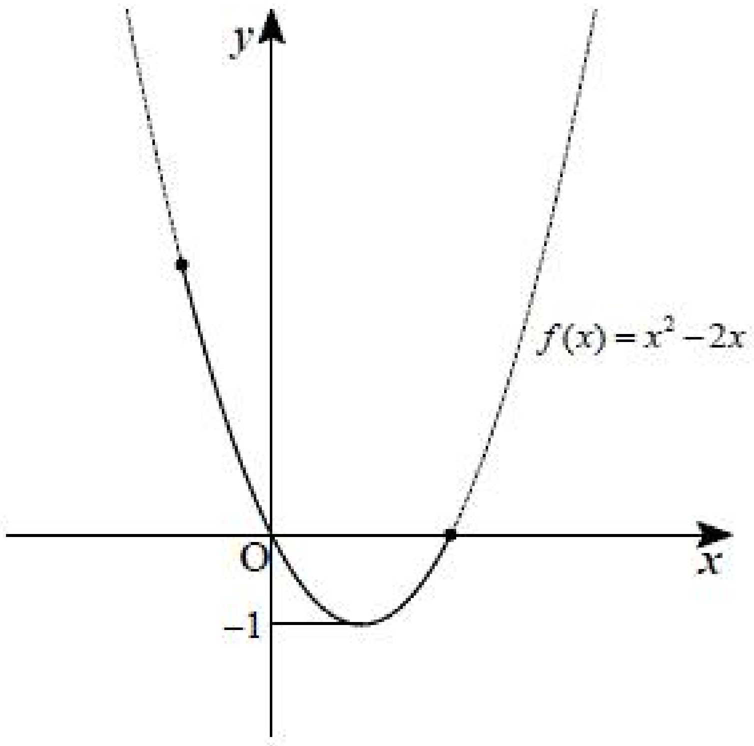
5

(1)

$t=0$ のとき，定義域は $-1 \leqq x \leqq 2$ であるから，下図より

$$m(0)=-1$$

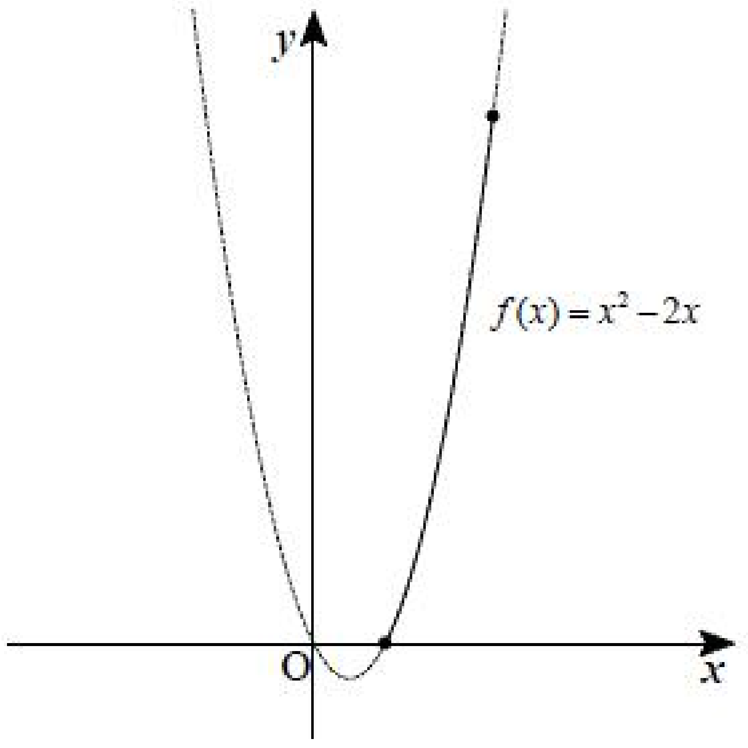
である。



$t=3$ のとき，定義域は $2 \leqq x \leqq 5$ であるから，下図より

$$m(3)=f(2)=0$$

である。



(答) $m(0)=-1$，$m(3)=0$

(2)

$y=f(x)$ は下に凸の放物線で，軸が $x=1$ だから，定義域に軸が含まれるかどうかで場合分けをすれば良い。

[1] $t+2<1$ つまり $t<-1$ のとき

$$m(t)=f(t+2)=t^2+2t$$

である。

[2] $t+2 \geqq 1$ かつ $t-1 \leqq 1$ つまり $-1 \leqq t \leqq 2$ のとき

$$m(t)=f(1)=-1$$

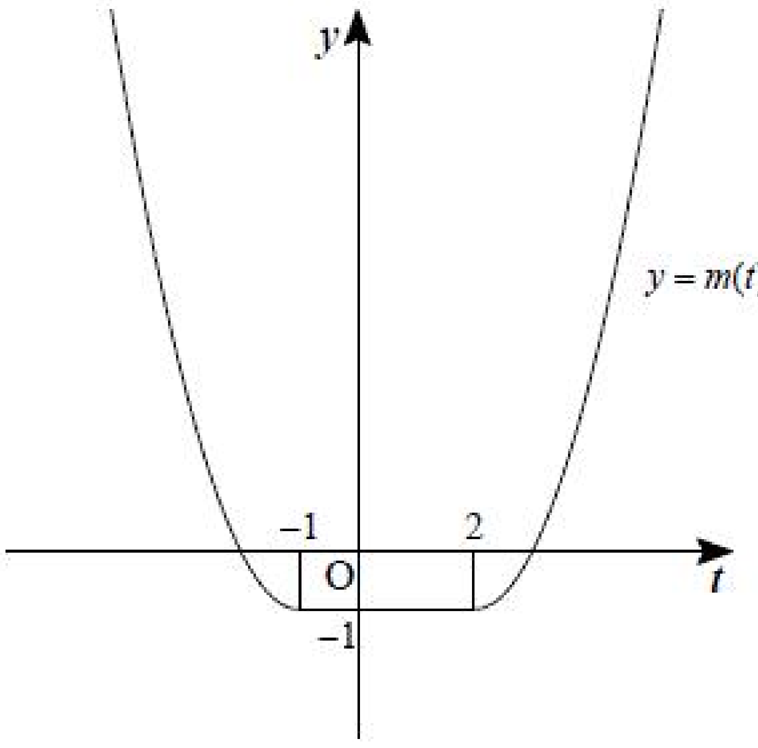
である。

[3] $t-1>1$ つまり $t>2$ のとき

$$m(t)=f(t-1)=t^2-4t+3$$

である。

以上[1]~[3]より $y=m(t)$ は下図のようになる。



(答) 前図