$\boxed{1}$

(1)

nは自然数と考える。

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

であるので

$$a_n=\int_0^n \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$
$$=\int_0^n\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\left[\log\frac{x+1}{x+2}\right]_0^n$$
$$=\log\frac{n+1}{n+2}-\log\frac{1}{2}$$
$$=\log\frac{2(n+1)}{n+2}$$

となる。

(答)　$a_n=\log 2\left|\frac{n+1}{n+2}\right|$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2(n+1)}{n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log 2+\log\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$
$$=\log 2$$

となる。

(答) $\log 2$

2

(1)

点Gの座標は

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

となる。点Pは直線AG上にあるので，実数kを用いると

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AG}$$
$$=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OG}$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}k,\frac{k}{3},\frac{k}{3}\right)$$

と表せる。ここで$\left|\overrightarrow{OP}\right|=1$より

$$\left(1-\frac{2}{3}k\right)^2+\left(\frac{k}{3}\right)^2+\left(\frac{k}{3}\right)^2=1^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k^2-\frac{4}{3}k+1=1$$
$$\Leftrightarrow k(k-2)=0$$
$$\therefore k=0,\ 2$$

となる。点Pは点Aと異なるので$k\neq 0$であり，したがって$k=2$となる。よって

$$\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

となる。

(答) $(x,y,z)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

(2)

点Pは三角形ABC上にあるので，実数s,tを用いると

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$
$$=(1-s-t,s,t)$$

と表せる。また$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OA}$のなす角が$\frac{\pi}{3}$であることから

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow 1-s-t=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$
$$\therefore t=\frac{1}{2}-s$$

となる。したがって$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2},s,\frac{1}{2}-s\right)$と表され，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=1$より

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+s^2+\left(\frac{1}{2}-s\right)^2=1^2$$
$$\Leftrightarrow 2s^2-s+\frac{1}{2}=1$$
$$\therefore s=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

となる。

(答) $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

$\boxed{3}$

(1)

$$f(x)=0$$
$$\Leftrightarrow e^x(\sin x-\cos x)=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x-\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\therefore \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

となる。これを $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で解くと

$$x-\frac{\pi}{4}=0,\ \pi$$
$$\therefore x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

となる。

(答) $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

(2)

$f(x)=s$ をみたす x の個数は 2 つのグラフ

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=s \end{cases}$$

の共有点の個数に等しい。

$$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$$
$$=2e^x\sin x$$

であるので，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $f'(x)=0$ を解くと

$$x=0,\ \pi,\ 2\pi$$

となる。したがって増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	e^{π}	$\searrow$	$-e^{2\pi}$

よって求める個数 $g(s)$ は

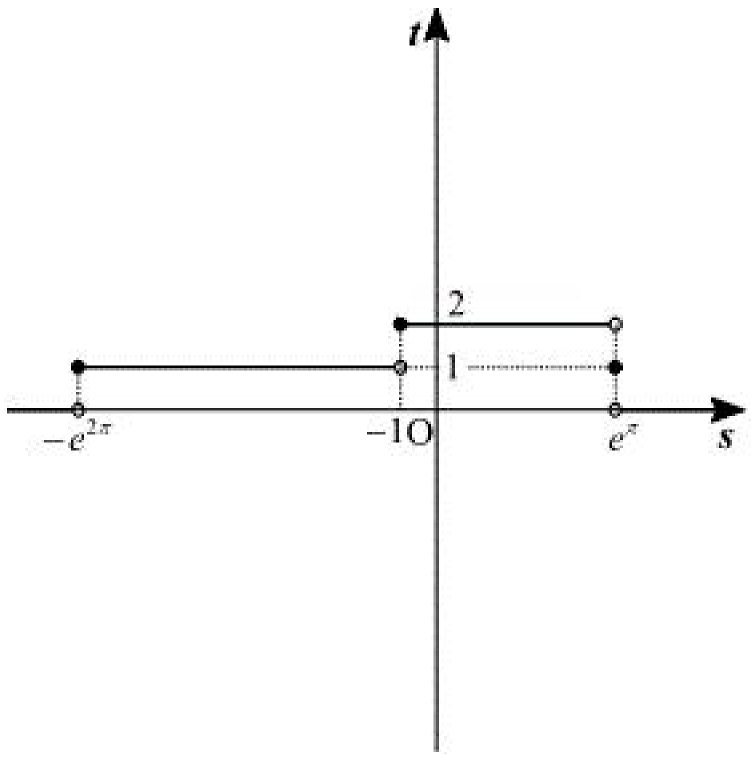
$$g(s)=\begin{cases} 0 & (s<-e^{2\pi},\ e^{\pi}<s \text{ のとき}) \\ 1 & (s=e^{\pi},\ -e^{2\pi}\leqq s<-1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-1\leqq s<e^{\pi} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) $g(s)=\begin{cases} 0 & (s<-e^{2\pi},\ e^{\pi}<s \text{ のとき}) \\ 1 & (s=e^{\pi},\ -e^{2\pi}\leqq s<-1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-1\leqq s<e^{\pi} \text{ のとき}) \end{cases}$

(3)

(2)の結果より，グラフは次のようになる。



(答) 前図

4

(1)

$$a_{n+1}=2\left(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+1\right)\ \ (n\geqq 1)$$

より

$$a_n=2\left(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1+1\right)\ \ (n\geqq 2)$$

である。この2式の両辺の差をとると $n\geqq 2$ のとき,

$$a_{n+1}-a_n=2a_n$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1}=3a_n$$

である。$a_1=2,\ a_2=2\left(a_1+1\right)=6$ より，$a_{n+1}=3a_n$ は $n=1$ のときも成り立つ。したがって，数列 $\left\{a_n\right\}$ は初項2，公比3の等比数列であるから，一般項は,

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

である。

(答) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

(2)

$$b_{n+1}=b_n+3b_{n-1}+5b_{n-2}+\cdots+\left(2n-1\right)b_1+2n$$

より $n>1$ のとき

$$b_n=b_{n-1}+3b_{n-2}+5b_{n-3}+\cdots+\left(2n-3\right)b_1+2\left(n-1\right)$$

である。この2式の両辺の差をとると

$$b_{n+1}-b_n=b_n+2\left(b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+1\right)$$
$$\therefore b_{n+1}=2\left(b_n+b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+1\right)$$

となる。$n>2$ のとき

$$b_{n+1}=2\left(b_n+b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+1\right)$$

$$b_n=2\left(b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}+\cdots+b_1+1\right)$$

が成り立つから，辺々を引いて

$$b_{n+1}-b_n=2b_n$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}=3b_n$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}=3^{n-2}b_3=3^{n-2}\cdot 10$$

となる。$n=3$ の時も含めて $b_n=3^{n-3}\cdot 10$ が成り立つが，$b_1=1,\ b_2=3$ なのでこれらの場合は成り立たない。

(答) $b_1=1,\ b_2=3,\ b_n=3^{n-3}\cdot 10\ (n\geqq 3)$

$\boxed{5}$

(1)

$$f'(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{x(x-1)}{2(x+1)}$$

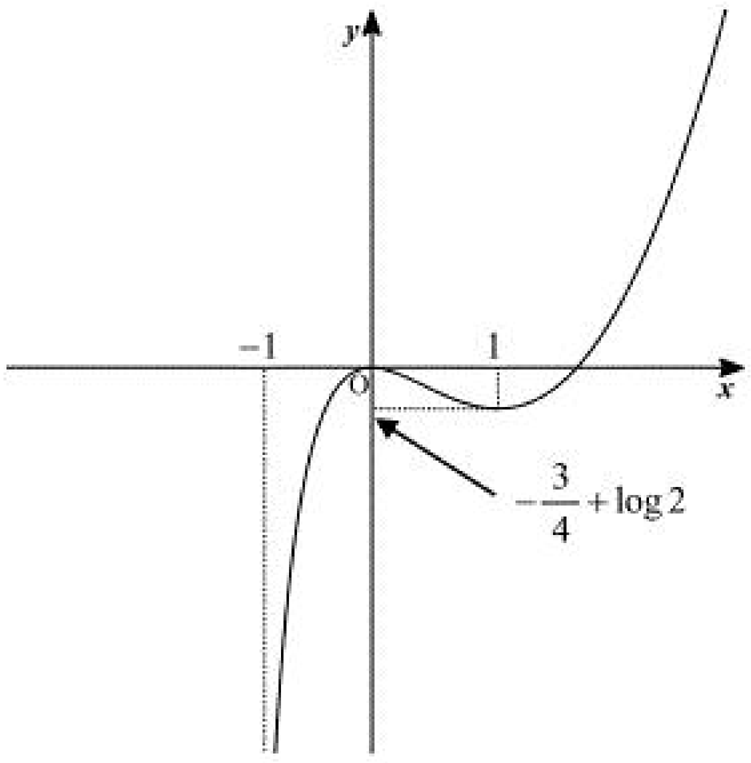
であるので，増減表は次のようになる。

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{3}{4}+\log 2$	↗

また極限を求めると

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

となる。よってグラフは次のようになる。



(答)前図

(2)

(1)のグラフより，$a\neq 0$ かつ $f(a)=0$ となる a はただ1つであり，$a>1$ であることは明らかである。また

$$f(2)=\log 3-1$$
$$>\log e-1$$
$$=0$$

より $f(2)>0$ である。$f(1)<0$ であり，$1<x$ で $f(x)$ は連続であるので

$$1<a<2$$

となる。

(証明終)

(3)

$$\int f(x)dx=\int\left\{\frac{1}{4}x^2-x+\log(x+1)\right\}dx$$
$$=\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{2}+(x+1)\log(x+1)-x+C$$

である(C は積分定数)。いま $F(x)=\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{2}+(x+1)\log(x+1)-x$ とすると，区間 $[0,a]$ において $f(x)\leqq 0$ であることから

$$S_1=F(0)-F(a)$$

となり，区間 $[a,4]$ において $f(x)\geqq 0$ であることから

$$S_2=F(4)-F(a)$$

となる。したがって

$$S_1<S_2\Leftrightarrow F(0)<F(4)$$

となる。ここで $F(0)=0$ であるので，$F(4)>0$ を示せばよい。

$$F(4)=\frac{16}{3}-8+5\log 5-4$$
$$=5\left(\log 5-\frac{4}{3}\right)$$

であり，また

$$\log 5>\frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow 5>e^{\frac{4}{3}}$$
$$\Leftrightarrow 125>e^4$$

であるので，$125>e^4$ を示せばよい。$e<3$ より

$$e^4<3^4$$
$$=81$$
$$<125$$

となるので，題意は示された。

(証明終)