【問 1】

$$f(x)=2x^2-ax+3$$

とおく。

(1)

$$f(x)=2x^2-ax+3=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+3-\frac{a^2}{8}$$

より, 2 次関数 $y=f(x)$ の頂点の座標は $\left(\frac{a}{4}, 3-\frac{a^2}{8}\right)$ となる。

(答) $\left(\frac{a}{4}, 3-\frac{a^2}{8}\right)$

(2)

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸の $0 \leqq x \leqq 2$ の部分と 2 点で交わる条件は, (1)より頂点の座標が $\left(\frac{a}{4}, 3-\frac{a^2}{8}\right)$ であることも用いて,

$$0 \leqq \frac{a}{4} \leqq 2,\ 3-\frac{a^2}{8}<0,\ f(0) \geqq 0,\ f(2) \geqq 0$$

となる。これらの式を変形すると, それぞれ

$$0 \leqq a \leqq 8,\ 2\sqrt{6}<|a|,\ 3 \geqq 0,\ a \leqq \frac{11}{2}$$

となるので, これらを同時に満たす a の値の範囲は

$$2\sqrt{6}<a \leqq \frac{11}{2}$$

となる。

(答) $2\sqrt{6}<a \leqq \frac{11}{2}$

【問 2】

さいころの目の出方は同様に確からしいとする。さいころを 1 個投げたときの目の出方は 6 通りある。3 個のさいころを区別して考えると，全ての目の出方は $6^3 = 216$ 通りある。

(1)

すべてのさいころで 5 以下の目が出るという事象の場合の数は $5^3 = 125$ 通りあるため，求める確率 P_1 は

$$P_1 = \frac{125}{216}$$

となる。

(答) $P_1 = \dfrac{125}{216}$

(2)

さいころを 3 個投げたとき，出る目の最大値が 5 となるのは，少なくとも 1 個のさいころで 5 の目が出て，かつ，他のさいころの出る目が 5 以下である場合である。つまり，すべてのさいころの出る目が 5 以下である場合のうち，すべてのさいころの出る目が 4 以下である場合を除いた事象である。この事象の場合の数は，

$5^3 - 4^3 = 61$ 通り

である。よって，求める確率 P_2 は

$$P_2 = \frac{61}{216}$$

となる。

(答) $P_2 = \dfrac{61}{216}$

(3)

さいころを 3 個投げたとき，出る目の和が 8 となるような目の出方の組み合わせは，

$(1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)$

である。

[1] 出る目の組み合わせが $(1, 1, 6), (2, 2, 4), (2, 3, 3)$ であるとき

さいころの出る目の割り当て方はそれぞれの場合で 3 通りずつある。

[2] 出る目の組み合わせが $(1, 2, 5), (1, 3, 4)$ であるとき

さいころの出る目の割り当て方はそれぞれの場合で 6 通りずつある。以上，[1]，[2]のすべての場合が互いに排反であるので，出る目の和が 8 になる事象の場合の数は，

$3 \times 3 + 2 \times 6 = 21$ 通り

ある。よって，求める確率 P_3 は

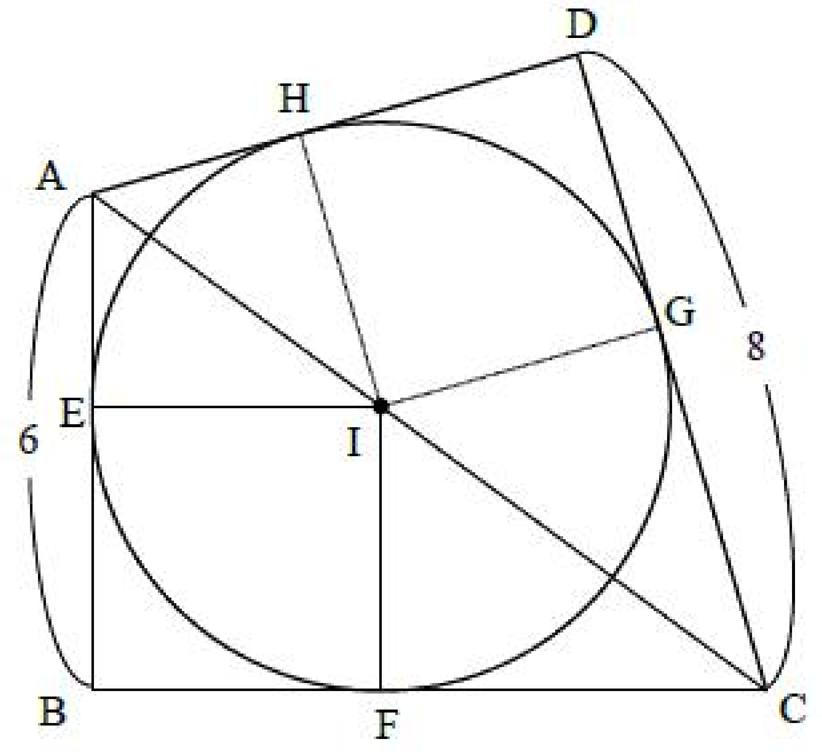
$$P_3 = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$$

となる。

(答) $P_3 = \dfrac{7}{72}$

【問 3】

(1)



図のように円 O の中心を I，辺 AB, BC, CD, DA と円 O の接点をそれぞれ E, F, G, H とおく。このとき，

$AB \perp IE,\ BC \perp IF,\ CD \perp IG,\ DA \perp IH$ ・・・①

が成り立つ。また，四角形 ABCD の内接円の半径より

$IE = IF = IG = IH$ ・・・②

である。△ AIE と△ AIH について，辺 IA は共通，①より $\angle AEI = \angle AHI = 90°$，②より $IE = IH$ であるため，直角三角形について斜辺とその他の 1 辺の長さが等しく，直角三角形の合同条件を満たす。よって，$\triangle AIE \equiv \triangle AIH$ となる。合同な図形の対応する角の大きさが等しいことから，

$\angle IAE = \angle IAH$ ・・・③

が成り立つ。同様にして，$\triangle CIF \equiv \triangle CIG$ となり，

$\angle ICF = \angle ICG$ ・・・④

が成り立つ。△ ABC と△ ADC について，辺 AC は共通であることと③，④より，1 辺とその両端の角が等しいことから，三角形の合同条件を満たし，$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ となる。したがって，対応する辺の長さが等しいことから

$BC = DC = 8$

となる。よって，題意は示された。

(証明終)

(2)

題意より $AB \perp BC$ であり，また①より $AB \perp IE$ であるため

$BC /\!/ IE$ ・・・⑤

である。△ ABC と△ AEI について，題意より 3 点 A, I, C が一直線上に存在することに注意すると，$\angle BAC = \angle EAI$ (共通)，⑤より $\angle ABC = \angle AEI$ (同位角)，⑤より $\angle ACB = \angle AIE$ (同位角) であるため，3 つの角が等しくなることが分かり，

$\triangle ABC \backsim \triangle AEI$ ・・・⑥

となる。円 O の半径を r とすると四角形 BEIF は 1 辺 r の正方形となることから

$BE = IE = r$

となるため

$AE = AB - BE = 6 - r$

である。⑥より

$AE : AB = EI : BC$

$\Leftrightarrow (6-r) : 6 = r : 8$

$\Leftrightarrow 8(6-r) = 6r$

$\Leftrightarrow 14r = 48$

$\therefore r = \dfrac{24}{7}$

となる。

(答) $r = \dfrac{24}{7}$

【問 4】

x の 2 次方程式

$$x^2-(k-2)x+2k=0$$

の 2 解を $x=\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=k-2 \quad \cdots ①$$

$$\alpha\beta=2k \quad \cdots ②$$

とかける。

(1)

2 つの解の差が 1 であるとき，$\beta>\alpha$ とすれば $\beta=\alpha+1$ とかけるため，①より

$$\alpha+(\alpha+1)=k-2$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{k-3}{2} \quad \cdots ③$$

②より

$$\alpha(\alpha+1)=2k \quad \cdots ④$$

である。③を④に代入すると

$$\frac{k-3}{2}\cdot\frac{k-1}{2}=2k$$

$$\Leftrightarrow k^2-4k+3=8k$$

$$\Leftrightarrow k^2-12k+3=0$$

$$\Leftrightarrow k=6\pm\sqrt{33}$$

となる。

(答) $6\pm\sqrt{33}$

(2)

2 つの実数解の絶対値の和が $2\sqrt{2}$ のとき，解 $\alpha,\ \beta$ は実数である。ここで，一方の解が 0 であるとすると，②より $k=0$ となる。このとき，x の 2 次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ は

$$x^2+2x=0$$

となり，これを解くともう一方の解が -2 であると分かるが，このときの解の絶対値の和は $2\sqrt{2}$ にならないので，これは不適である。よって，2 つの解はともに 0 ではないので，$\alpha\leqq\beta$ とすると

[1] $0<\alpha\leqq\beta$ のとき

[2] $\alpha<0<\beta$ のとき

[3] $\alpha\leqq\beta<0$ のとき

について考えればよい。ただし，x の 2 次方程式 $x^2-(k-2)x+2k=0$ が 2 つの実数解をもつとき，この方程式の解の判別式を D とすると，

$$D\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow (k-2)^2-4\cdot 2k\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2-12k+4\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow k\leqq 6-4\sqrt{2},\ 6+4\sqrt{2}\leqq k \quad \cdots ⑤$$

を満たさなければならない。

[1] $0<\alpha\leqq\beta$ のとき

$\alpha\beta>0$ より，②から $k>0$ となるもとで

$$|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta=2\sqrt{2}$$

より，①から

$$k-2=2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow k=2+2\sqrt{2}$$

となる。しかし，これは⑤を満たさないので不適である。

[2] $\alpha<0<\beta$ のとき

$\alpha\beta<0$ より，②から $k<0$ となるもとで

$$|\alpha|+|\beta|=-\alpha+\beta=2\sqrt{2}$$

より，①から

$$\beta=\frac{k-2+2\sqrt{2}}{2},\ \alpha=\frac{k-2-2\sqrt{2}}{2}$$

となる。これらを②に代入すると，

$$\left(\frac{k-2-2\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{k-2+2\sqrt{2}}{2}\right)=2k$$

$$\Leftrightarrow (k-2)^2-8=8k$$

$$\Leftrightarrow k^2-12k-4=0$$

となる。このとき，

$$k^2-12k+4=8>0$$

より⑤を満たす。このときの k の値は

$$k^2-12k-4=0$$

$$\Leftrightarrow k=6\pm2\sqrt{10}$$

となる。ただし，$k=6+2\sqrt{10}$ は $k<0$ を満たさず，不適である。一方，$k=6-2\sqrt{10}$ は $k<0$ を満たし，適する。

[3] $\alpha\leqq\beta<0$ のとき

$\alpha\beta>0$ より，②から $k>0$ となるもとで

$$|\alpha|+|\beta|=-\alpha-\beta=2\sqrt{2}$$

より，①から

$$k-2=-2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow k=2-2\sqrt{2}$$

となる。しかし，これは $k>0$ を満たさないので不適である。

以上，[1], [2], [3] より，求める k の値は

$$k=6-2\sqrt{10}$$

である。

(答) $6-2\sqrt{10}$