

(1)

与えられた a_n の式を変形すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

となる。この式の分母は n に関して単調増加であるから、 a_n は n が増加すると減少する。したがって、

$$a_{n+1} < a_n$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned} a_n &< \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} &< \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{n+1} &< 10\sqrt{n}+1 \end{aligned}$$

である。両辺共に正であるから、両辺を2乗しても同値であり

$$\begin{aligned} (10\sqrt{n+1})^2 &< (10\sqrt{n}+1)^2 \\ \Leftrightarrow 100(n+1) &< 100n+20\sqrt{n}+1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n} &> \frac{99}{20} \\ \therefore n &> \frac{9801}{400} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{9801}{400} = 24 + \frac{201}{400}$ であるから、求める n の値は25である。

(答) $n=25$

$f(x)$ の導関数を求めると、

$$f'(x) = 2ax + b$$

であるから、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (2a\alpha + b)(x - \alpha) + a\alpha^2 + b\alpha + c \\ &= (2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ax^2 + bx + c - \{(2a\alpha + b)x - a\alpha^2 + c\} \right] dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) dx \\ &= a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx \\ &= a \left[\frac{1}{3} (x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{a}{3} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a}{3} (\beta - \alpha)^3$$

(1)

$\log_a x, \log_b x$ はそれぞれ増加関数であるから、

$$1 < a, 1 < b$$

である。また、 $y = \log_a x, y = \log_b x$ の逆関数をそれぞれ求めると、

$$x = a^y, x = b^y$$

となる。与えられたグラフより、 $y > 0$ のときに

$$a^y < b^y$$

が成り立つことから $a < b$ である。したがって、

$$1 < a < b$$

とわかる。

(答) $1 < a < b$

(2)

$t = a$ のとき、与えられた条件より、

$$AT : BT = 3 : 2$$

$$\Leftrightarrow \log_a a : \log_b a = 3 : 2$$

$$\Leftrightarrow 1 : \log_b a = 3 : 2$$

$$\Leftrightarrow \log_b a = \frac{2}{3}$$

である。また、一般の $t > 0$ に関して、

$$AT = |\log_a t|$$

$$BT = |\log_b t|$$

より、

$$AT : BT = |\log_a t| : |\log_b t|$$

$$= 1 : \frac{|\log_b t|}{|\log_a t|} \quad (\because t \neq 1 \text{ より } |\log_a t| \neq 0)$$

$$= 1 : \frac{|\log_b t|}{\left| \frac{\log_b t}{\log_b a} \right|}$$

$$= 1 : \log_b a$$

$$= 3 : 2$$

となる。

(答) $AT : BT = 3 : 2$

(3)

点 P の x 座標 u を求めると、

$$\log_a u = \log_b 8$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \log_b a \log_a 2^3$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \frac{2}{3} \log_a 2^3$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \log_a 4$$

$$\therefore u = 4$$

となる。

(答) $u = 4$

(1)

数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 &= 1 \\ &= 2^{1-1}\end{aligned}$$

より成り立つ。

[2] $n=k$ で成立することを仮定したとき

$$\begin{aligned}x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 &= (x_k - y_k)^2 + (x_k + y_k)^2 \\ &= 2(x_k^2 + y_k^2) \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} \\ &= 2^{(k+1)-1}\end{aligned}$$

より $n=k+1$ でも成り立つ。

以上[1], [2]より, 数学的帰納法から $x_n^2 + y_n^2 = 2^{n-1}$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)の結果を用いると

$$\begin{aligned}x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n &= (x_n - y_n)x_n + (x_n + y_n)y_n \\ &= x_n^2 + y_n^2 \\ &= 2^{n-1} \\ x_{n+2}x_n + y_{n+2}y_n &= (x_{n+1} - y_{n+1})x_n + (x_{n+1} + y_{n+1})y_n \\ &= x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n + (x_n - y_n)y_n - (x_n + y_n)x_n \\ &= 2^{n-1} - (x_n^2 + y_n^2) \\ &= 2^{n-1} - 2^{n-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

が得られる。

$$\begin{aligned}(\text{答}) \quad x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n &= 2^{n-1} \\ x_{n+2}x_n + y_{n+2}y_n &= 0\end{aligned}$$

(3)

ベクトルを用いて点 P_n を表すと

$$\overrightarrow{OP_n} = (x_n, y_n)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}\cos \angle P_{n+1}OP_n &= \frac{\overrightarrow{OP_{n+1}} \cdot \overrightarrow{OP_n}}{\left| \overrightarrow{OP_{n+1}} \right| \left| \overrightarrow{OP_n} \right|} \\ &= \frac{x_{n+1}x_n + y_{n+1}y_n}{\sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2^{n-1}} \sqrt{2^n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \angle P_{n+2}OP_n &= \frac{\overrightarrow{OP_{n+2}} \cdot \overrightarrow{OP_n}}{\left| \overrightarrow{OP_{n+2}} \right| \left| \overrightarrow{OP_n} \right|} \\ &= \frac{x_{n+2}x_n + y_{n+2}y_n}{\sqrt{x_{n+2}^2 + y_{n+2}^2} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。従って,

$$\begin{aligned}\angle P_{n+1}OP_n &= \frac{\pi}{4} \\ \angle P_{n+2}OP_n &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \angle P_{n+1}OP_n = \frac{\pi}{4}, \angle P_{n+2}OP_n = \frac{\pi}{2}$$

(4)

(1)から(3)より

$$(x_n, y_n) = \left(2^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{4} \pi \right), 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{4} \pi \right) \right)$$

と推測できる。数学的帰納法を用いてこれを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}x_1 &= 2^{\frac{1-1}{2}} \cos 0 \\ &= 1 \\ y_1 &= 2^{\frac{1-1}{2}} \sin 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

より, $n=1$ で成り立つ。

[2] $n=k$ で成立することを仮定したとき

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - y_k \\ &= 2^{\frac{k-1}{2}} \cos \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) - 2^{\frac{k-1}{2}} \sin \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) \\ &= 2^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{2} \cos \left\{ \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= 2^{\frac{(k+1)-1}{2}} \cos \left(\frac{(k+1)-1}{4} \pi \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= x_k + y_k \\ &= 2^{\frac{k-1}{2}} \cos \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) + 2^{\frac{k-1}{2}} \sin \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) \\ &= 2^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{2} \sin \left\{ \left(\frac{k-1}{4} \pi \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= 2^{\frac{(k+1)-1}{2}} \sin \left(\frac{(k+1)-1}{4} \pi \right)\end{aligned}$$

となるので, $n=k+1$ でも成り立つ。

以上[1], [2]より

$$(x_n, y_n) = \left(2^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{4} \pi \right), 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{4} \pi \right) \right)$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad (x_n, y_n) = \left(2^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{4} \pi \right), 2^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{4} \pi \right) \right)$$

(1)

$$x+y+z=100 \text{ より}$$

$$x+y=100-z$$

である。ここで、三角形の成立条件より

$$x+y>z$$

$$\Leftrightarrow 100-z>z$$

$$\Leftrightarrow 100>2z$$

$$\Leftrightarrow 50>z$$

となる。また、 $x \leq y \leq z$ より $x+y+z \leq 3z$ であるから

$$100 \leq 3z$$

$$\Leftrightarrow z \geq \frac{100}{3}$$

であり、これをみたす最小の z は $z=34$ である。このとき

$$(x, y, z) = (33, 33, 34)$$

であるから、 $z=34$ となる三角形は確かに存在することがわかる。以上より、 z のとりうる範囲は

$$34 \leq z \leq 49$$

である。

(答) $34 \leq z \leq 49$

(2)

$z=45$ より、

$$x+y=55$$

である。 $x \leq y$ より $x+y \leq 2y$ であるから

$$55 \leq 2y$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{55}{2}$$

より、これをみたす最小の y は $y=28$ である。したがって、 y が最小となるのは

$(x, y, z) = (27, 28, 45)$ のときである。また、 y が最大となるのは $y=z=45$ のときである。し

たがって、求める三角形の個数は

$$45-28+1=18 \text{ (個)}$$

である。

(答) 18 個

(3)

z の偶奇によって場合分けをする。

[1] z が偶数のとき

n を 17 から 24 の自然数として、 $z=2n$ とすると

$$x+y=100-2n$$

である。(2)と同様にして y の範囲を求めると

$$50-n \leq y \leq 2n$$

となる。従って、 z が偶数のときの三角形の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{n=17}^{24} \{2n - (50-n) + 1\} &= \sum_{n=17}^{24} (3n-49) \\ &= 3 \sum_{n=17}^{24} n - \sum_{n=17}^{24} 49 \\ &= 3 \cdot \frac{(17+24) \cdot 8}{2} - 49 \cdot 8 \\ &= 100 \end{aligned}$$

である。

[2] z が奇数のとき

n を 17 から 24 の自然数として、 $z=2n+1$ とすると

$$x+y=100-2n-1$$

である。(2)と同様にして y の範囲を求めると

$$50-n \leq y \leq 2n+1$$

となる。従って、 z が偶数のときの三角形の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{n=17}^{24} \{(2n+1) - (50-n) + 1\} &= \sum_{n=17}^{24} (3n-48) \\ &= 3 \sum_{n=17}^{24} n - \sum_{n=17}^{24} 48 \\ &= 3 \cdot \frac{(17+24) \cdot 8}{2} - 48 \cdot 8 \\ &= 108 \end{aligned}$$

である。

以上[1],[2]より、求める三角形の個数は

$$100+108=208 \text{ (個)}$$

である。

(答) 208 個