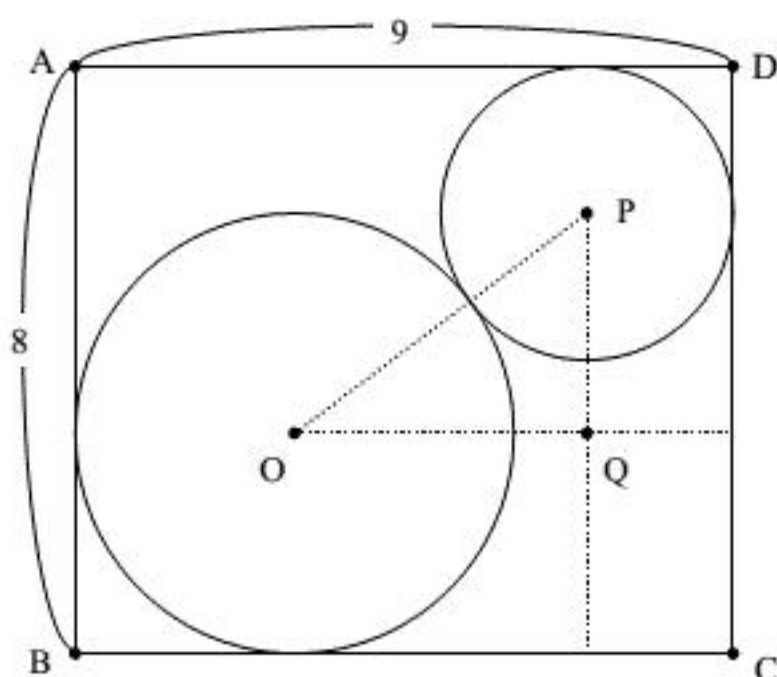


【問 1】

(1)



上図のように点 P から辺 BC におろした垂線と、点 O から辺 CD におろした垂線の交点を Q とおく。ここで円 O と円 P は外接することから

$$OP = x + y$$

である。また、 $BC = 9$ 、 $BA = 8$ であることから、

$$OQ = 9 - (x + y), \quad PQ = 8 - (x + y) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。円 O と円 P は長方形の内部に含まれるため、ともに直径の長さは長方形の辺の長さ以下である必要があるから、

$$0 < 2x \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$0 < 2y \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 0 < y \leq 4 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $x = y = 4$ であると仮定すると、円 O と円 P は辺 BC と辺 AD に接することになるが、この場合は長方形の内部に 2 円が存在しえないため、不適である。よって、 x, y の値がともに 4 となることはなく、②、③より

$$0 < x + y < 8 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって、①より $OQ > 0$ 、 $PQ > 0$ である。ここで、 $\angle OQP = 90^\circ$ であるから三角形 OPQ に関して三平方の定理を用いて

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = \{9 - (x + y)\}^2 + \{8 - (x + y)\}^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 34(x + y) + 145 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 5)(x + y - 29) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 5, 29$$

となり、④より $x + y = 5$ になることが示された。

(証明終)

(2)

円 O と円 P の面積の和を S とおくと

$$S = \pi x^2 + \pi y^2$$

$$= \pi(x^2 + y^2)$$

であり、(1)の結果より $y = 5 - x$ であるから

$$S = \pi \{x^2 + (5 - x)^2\}$$

$$= \pi(2x^2 - 10x + 25)$$

$$= \pi \left\{ 2 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{2} \right\}$$

となる。ここで、③と $y = 5 - x$ より

$$0 < 5 - x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x < 5 \quad \dots \textcircled{3}$$

となるから、②、③より x のとりうる値の範囲は

$$1 \leq x \leq 4$$

である。よって、 S は

$$x = 1, 4 \text{ のとき、最大値 } 17\pi$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ のとき、最小値 } \frac{25}{2}\pi$$

をとる。

(答) 最大値： 17π 、最小値： $\frac{25}{2}\pi$