

(1)

α, β を解にもつ 2 次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

と表される。 $\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=\sqrt{3}$ より, これらを解にもつ 2 次方程式は,

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}+\sqrt{6}=0$$

と求まる。

$$(答) \ x^2-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{3}+\sqrt{6}=0$$

(2)

$s=t=1$ とすると $\alpha=1+\sqrt{2}$ となる。(1)より, もう一つの解 β が $\sqrt{3}$ となるような 2 次方程式が存在し, 与えられた議論は正しくないことが示される。また, 与えられた議論は方程式 $f(x)=0$ の係数が有理数のときに成り立つ。

(証明終)

(3)

与えられた方程式に $x=1+\sqrt{2}$ を代入すると,

$$(1+\sqrt{2})^2+p(1+\sqrt{2})+q=0$$

$$\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2}+2)+p(1+\sqrt{2})+q=0$$

$$\Leftrightarrow p+q+3+(p+2)\sqrt{2}=0$$

となる。 $p+q+3$ および $p+2$ は有理数であるから,

$$\begin{cases} p+q+3=0 \\ p+2=0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと,

$$p=-2, q=-1$$

となる。したがって与えられた方程式は

$$x^2-2x-1=0$$

であり解は $x=1\pm\sqrt{2}$ となる。以上より,

$$\beta=1-\sqrt{2}$$

と求まる。

$$(答) \ \beta=1-\sqrt{2}$$

(1)

放物線 C の方程式の両辺を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となる。したがって ℓ_T の傾きは $2a$ となり

$$\tan \theta = 2a$$

と表される。したがって、 $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)} \\ &= \frac{\cos 2\theta}{-\sin 2\theta} \\ &= -\frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= -\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \\ &= -\frac{1 - 4a^2}{4a} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan \theta = 1$ より $a = \frac{1}{2}$ となる。このとき、

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \tan \pi = 0$$

となり、 $\textcircled{1}$ に $a = \frac{1}{2}$ を代入した結果と一致する。以上より、

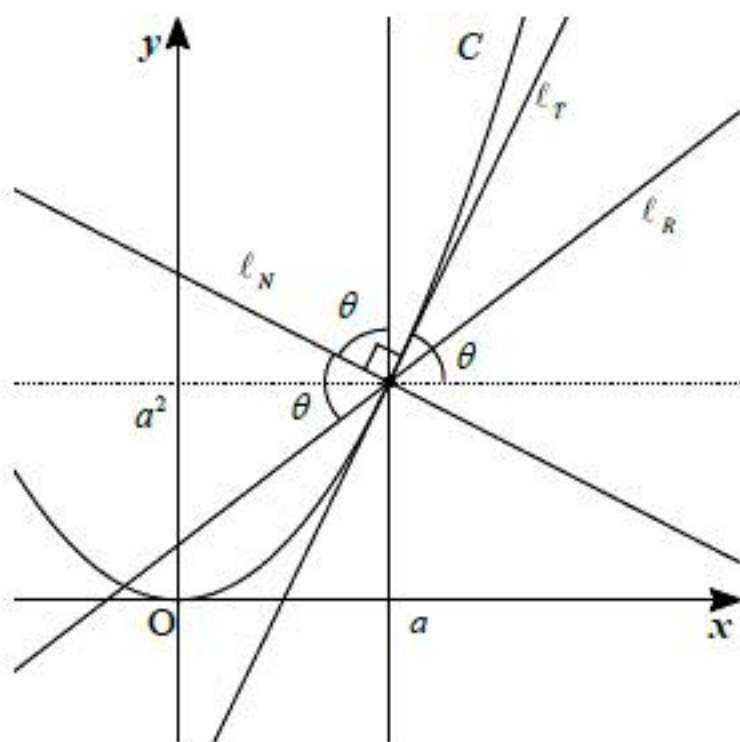
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = -\frac{1 - 4a^2}{4a}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1 - 4a^2}{4a}$$

(2)

$a > 0$ すなわち $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 ℓ_N の傾きは負であり ℓ_N と y 軸のなす角は θ である。



前図より、 ℓ_R は傾きが $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)$ で (a, a^2) を通る点であるから、方程式は

$$\begin{aligned} y &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)(x - a) + a^2 \\ &= -\frac{1 - 4a^2}{4a}(x - a) + a^2 \\ &= -\frac{1 - 4a^2}{4a}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって直線 ℓ_R は a の値によらず $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。対称性より $a < 0$ すなわち

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときも直線 ℓ_R は a の値によらず $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。 $a = 0$ のとき直線 ℓ_T の方程式は

$y = 0$ 、直線 ℓ_N の方程式は $x = 0$ であるから直線 ℓ_R の方程式は $x = 0$ となる。このとき直線 ℓ_R

は $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。以上より、直線 ℓ_R は a の値によらず定点 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。

(証明終)

3

(1)

$1-2a \neq 0$ のとき、与えられた関数は2次関数である。 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a+b-1)^2 - (1-2a)(1-b) \\ &= a^2 + b^2 - b \\ &= a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。題意を満たす条件は、 $1-2a > 0$ かつ $\frac{D}{4} \leq 0$ となる条件と一致する。したがって、

$$\begin{cases} 1-2a > 0 \\ \frac{D}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{2} \\ a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

が成り立つ。 $1-2a=0$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき、

$$f(x) = (2b-1)x + 1-b$$

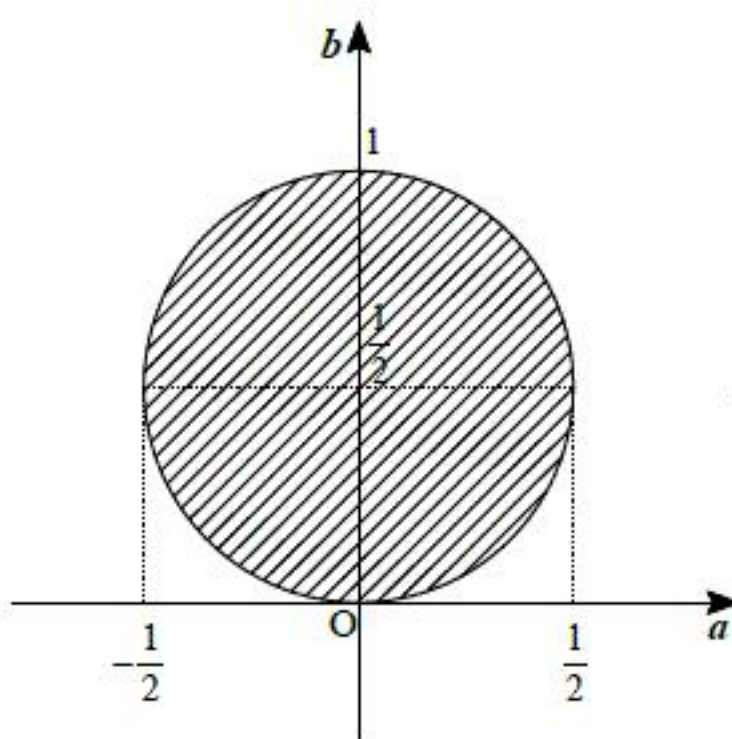
となる。全ての実数 x に対して $f(x) \geq 0$ となるためには、

$$\begin{cases} 2b-1=0 \\ 1-b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

が成り立つ必要がある。したがって、

$$(a, b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。以上より、条件を満たす (a, b) の範囲は以下の図の斜線部（境界含む）である。



(答) 前図斜線部（境界含む）

(2)

[1] $1-2a=0$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき、 $f(x)$ は x の1次関数である。

このとき、条件を満たすためには $f(0) \geq 0$ かつ $f(1) \geq 0$ となればよい。したがって、

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-b \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq b \leq 1$$

となる。

[2] $1-2a > 0$ すなわち $a < \frac{1}{2}$ のとき、 $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となる。

放物線の軸は $x = -\frac{a+b-1}{1-2a}$ である。軸の位置で場合分けをする。

[i] $-\frac{a+b-1}{1-2a} < 0$ のとき

$$\begin{aligned}-\frac{a+b-1}{1-2a} &< 0 \\ \Leftrightarrow -(a+b-1) &< 0 \quad (\because 1-2a > 0) \\ \Leftrightarrow b &> -a+1\end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は単調増加であるから、 $f(x) \geq 0$ となるためには

$f(0) \geq 0$ となればよい。したがって、

$$\begin{aligned}f(0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-b &\geq 0 \\ \therefore b &\leq 1\end{aligned}$$

と求まる。

[ii] $0 \leq -\frac{a+b-1}{1-2a} \leq 1$ のとき

$$0 \leq -\frac{a+b-1}{1-2a} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow a \leq b \leq -a+1$$

である。このとき $y=f(x)$ の頂点が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に存在するため、 $f(x) \geq 0$ と

なるためには

$$\begin{aligned}D &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となればよい。

[iii] $-\frac{a+b-1}{1-2a} > 1$ のとき

$$\begin{aligned}-\frac{a+b-1}{1-2a} &> 1 \\ \Leftrightarrow -(a+b-1) &> 1-2a \quad (\because 1-2a > 0) \\ \Leftrightarrow a &> b\end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は単調減少であるから、 $f(x) \geq 0$ となるためには

$f(1) \geq 0$ となればよい。したがって、

$$\begin{aligned}f(1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b &\geq 0\end{aligned}$$

と求まる。

[3] $1-2a < 0$ すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき、 $y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となる。

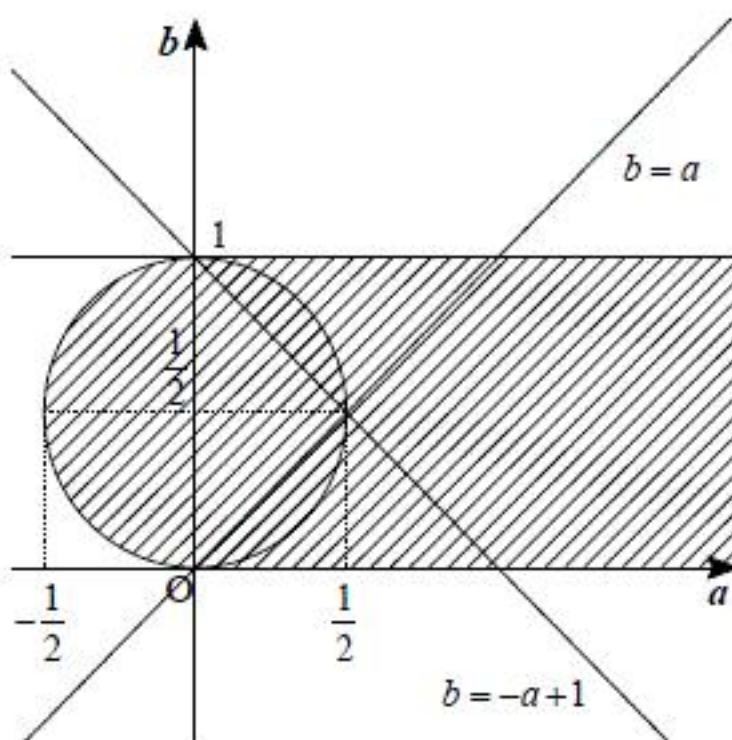
$0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最小値は $-\frac{a+b-1}{1-2a} \leq \frac{1}{2}$ のとき $f(1)$ であり $-\frac{a+b-1}{1-2a} > \frac{1}{2}$ のと

き $f(0)$ である。したがって $f(x) \geq 0$ となるためには

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-b \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq b \leq 1$$

となればよい。

以上[1][2][3]より、条件を満たす (a, b) の範囲は以下の図の斜線部である。



(答) 前図斜線部(境界含む)

与えられた三角形の各辺の長さを計算すると、

$$AB = \sqrt{1^2 + (-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

$$BC = \sqrt{(t-1)^2 + 1^2 + (-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

$$CA = \sqrt{(-t)^2 + (t-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 2}$$

となるため、 $\triangle ABC$ は正三角形である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} (2t^2 - 2t + 2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - t + 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。 t のとり得る範囲は $0 \leq t \leq 1$ であるから、 $t = \frac{1}{2}$ のとき S は

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(0^2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

を最小値にとる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

5

(1)

n 回の位置取り後小石がKにある事象は、 n 回サイコロを振るうち少なくとも1回は1または2の目が出る事象であり、 n 回サイコロを振るうち1または2の目が1回も出ない事象の余事象である。この余事象が起きる確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2)

数学的帰納法で証明する。

[1] 0回目の位置取り、すなわちサイコロを振る前は小石はAにある。

[2] $2k$ (k は0以上の整数)回目の位置取り後に小石がAまたはCにあると仮定する。

ここからKに移動しないように2回移動する経路は、

$$A \rightarrow B \rightarrow A, A \rightarrow D \rightarrow A, A \rightarrow B \rightarrow C, A \rightarrow D \rightarrow C,$$

$$C \rightarrow B \rightarrow A, C \rightarrow D \rightarrow A, C \rightarrow B \rightarrow C, C \rightarrow D \rightarrow C$$

の8通りである。いずれの経路をとっても、 $2(k+1)$ 回目の位置取り後に小石はAまたはCにある。

以上[1][2]より題意が示された。

(証明終)

(3)

2回目の位置取り後小石がAにあるような移動経路は、

$$A \rightarrow B \rightarrow A, A \rightarrow D \rightarrow A$$

の2通りである。したがって、

$$a_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

となる。 $2n$ 回目の位置取り後小石がCにあるとき、ここから2回の位置取り後Aにあるような経路は、

$$C \rightarrow B \rightarrow A, C \rightarrow D \rightarrow A$$

の2通りである。このようになる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$

である。(2)より、 $2n$ 回目の位置取り後小石がCにある確率は

$$1 - a_{2n} - k_{2n}$$

である。また、 $2n$ 回目の位置取り後小石がAにあるとき、ここから2回の位置取り後Aにある確率は a_2 の導出過程と同様の計算で $\frac{1}{6}$ と求まる。以上より、

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{1}{6} a_{2n} + \frac{5}{18} (1 - a_{2n} - k_{2n}) \\ &= -\frac{1}{9} a_{2n} - \frac{5}{18} k_{2n} + \frac{5}{18} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad a_2 = \frac{1}{6}, \quad a_{2n+2} = -\frac{1}{9} a_{2n} - \frac{5}{18} k_{2n} + \frac{5}{18}$$

(4)

(2)より、 n が奇数のときは $a_n = 0$ である。これ以降、 n が偶数のときを考える。(1)より

$$k_{2n} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

であるから(3)の答に代入して、

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= -\frac{1}{9} a_{2n} - \frac{5}{18} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \right\} + \frac{5}{18} \\ &= -\frac{1}{9} a_{2n} + \frac{5}{18} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \end{aligned}$$

が得られる。この漸化式の両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2}$ をかけると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2} a_{2n+2} &= -\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2} a_{2n} + \frac{5}{18} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} a_{2n} + \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。 $b_{2n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} a_{2n}$ とおくと、

$$b_{2n+2} = -\frac{1}{4} b_{2n} + \frac{5}{8} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。 $\textcircled{1}$ の特性方程式を解くと、

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{4} \alpha + \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られるため、 $\textcircled{1}$ は

$$\begin{aligned} b_{2n+2} &= -\frac{1}{4} b_{2n} + \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow b_{2n+2} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{4} \left(b_{2n} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。したがって数列 $\left\{ b_{2n} - \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $b_2 - \frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列である。これより、

$$\begin{aligned} b_{2n} - \frac{1}{2} &= \left(b_2 - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^2 a_2 - \frac{1}{2} \right\} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_{2n} &= -\frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} b_{2n} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{2^{2n} + (-1)^n}{2 \cdot 3^{2n}} \end{aligned}$$

となるため、 n が偶数のときは

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 3^n}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad n \text{が偶数のとき } a_n = \frac{2^n + (-1)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 3^n}, \quad n \text{が奇数のとき } a_n = 0$$