

(1)

$f'(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x \\ &= (x^2-2)e^x \\ &= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})e^x \end{aligned}$$

となるため、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$f(-2)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(2)$

$x=-2, \sqrt{2}$ のときの $f(x)$ の値をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} f(-2) &= 8e^{-2} = \frac{8}{e^2} \\ f(\sqrt{2}) &= (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。 $f(-2) > 0, f(\sqrt{2}) < 0$ であるから、 $f(x)$ の最小値は $(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ である。

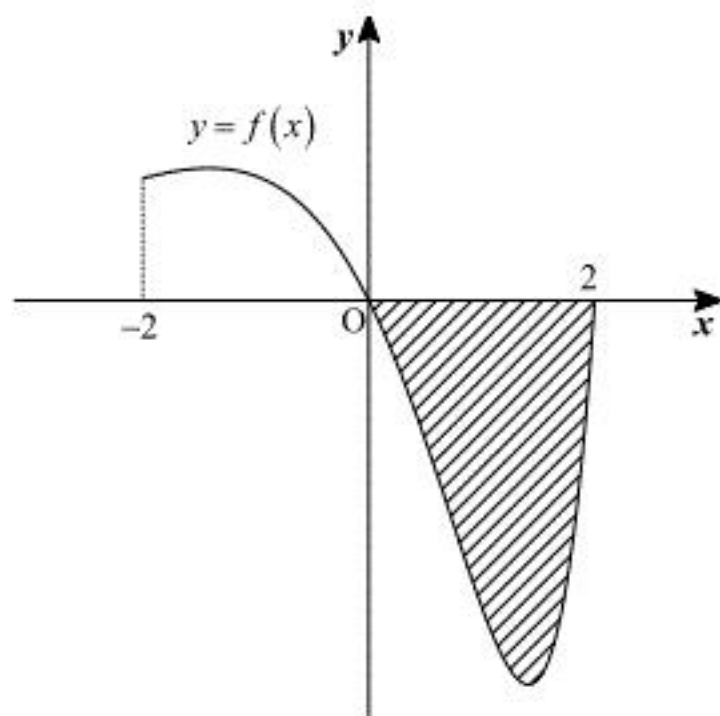
(答) $(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$

(2)

方程式 $f(x)=0$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-2x) &= 0 \quad (\because e^x > 0) \\ \Leftrightarrow x(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

となるので、 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形は下図の斜線部のようになる。



斜線部の面積を計算すると、

$$\begin{aligned} \int_0^2 -f(x) dx &= -\int_0^2 (x^2-2x)e^x dx \\ &= -\left[(x^2-2x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 (2x-2)e^x dx \\ &= -\left[(x^2-2x)e^x\right]_0^2 + \left[(2x-2)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 2e^x dx \\ &= -\left[(x^2-2x)e^x\right]_0^2 + \left[(2x-2)e^x\right]_0^2 - \left[2e^x\right]_0^2 \\ &= \left[(-x^2+4x-4)e^x\right]_0^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 4

(1)

$b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ とすると、与えられた式は、

$$b_n = b_{n-1} + 2$$

と変形できる。したがって数列 $\{b_n\}$ は初項 b_1 、公差 2 の等差数列である。これより、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + 2(n-1) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 + 2n - 2 \\ &= 3 + 2n - 2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)a_n &= 2n+1 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

(2)

a_n の一般項を変形すると、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって S_n を計算すると、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{4}$$

(1)

与えられた定積分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} &= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\sqrt{3}$

(2)

与えられた定積分を計算すると、

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

となる。 $t = \tan x$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Leftrightarrow dt &= \frac{1}{\cos^2 x} dx\end{aligned}$$

であり、積分区間の対応は以下のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$
t	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$

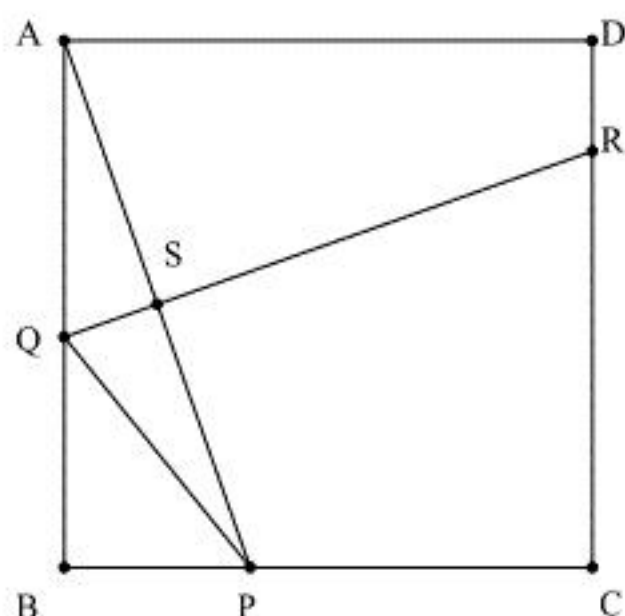
以上より、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $2\sqrt{3}$

各点の位置関係は以下の図のようになる。



$BP = t$ であるから、 $\triangle ABP$ における三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AB^2 + BP^2} \\ &= \sqrt{1^2 + t^2} \end{aligned}$$

となる。直線 QR は線分 AP の垂直二等分線であるから、

$$\begin{aligned} AS &= \frac{1}{2} AP \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sqrt{1+t^2}$$

(2)

QB の長さを x とする。

$$\begin{aligned} AQ &= PQ, \quad QS \text{ 共通}, \quad \angle AQS = \angle PQS \\ \therefore \triangle AQS &\equiv \triangle PQS \quad (\text{二辺夾角相等}) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} PQ &= AQ \\ &= 1 - x \end{aligned}$$

である。 $\triangle QBP$ における三平方の定理より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= QB^2 + BP^2 \\ \Leftrightarrow (1-x)^2 &= x^2 + t^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}(1-t^2) \end{aligned}$$

となる。Q から辺 CD に下ろした垂線の足を T とすると、

$$\begin{aligned} AB &= QT = 1 \\ \angle ABP &= \angle QTR = 90^\circ \\ \angle TQR &= 90^\circ - \angle AQS \\ &= \angle BAP \end{aligned}$$

より、 $\triangle ABP \equiv \triangle QTR$ が成り立つ (二角夾辺相等)。したがって $TR = BP = t$ となり、

$$\begin{aligned} RC &= TR + TC \\ &= BP + QB \\ &= t + \frac{1}{2}(1-t^2) \\ &= \frac{1}{2}(-t^2 + 2t + 1) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad QB = \frac{1}{2}(1-t^2), \quad RC = \frac{1}{2}(-t^2 + 2t + 1)$$

(1)

与えられた式を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} &= 2 \cos \left(\frac{\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{9}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{2\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}}{2} \right) + \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(-\frac{\pi}{9} \right) + \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{9} + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 0

(2)

与えられた式を計算すると、

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{9} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{4\pi}{9} \right) \right\} \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) \right\} \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} + \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) \right\} \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{4} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{8\pi}{9} \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{8\pi}{9} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{4} \left\{ \cos \frac{10\pi}{9} + \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \frac{8\pi}{9} + \frac{1}{4} \cos \frac{10\pi}{9} - \frac{1}{8} \\
 &= -\frac{1}{4} \cos \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) + \frac{1}{4} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{9} \right) - \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{8} \\
 &= -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $-\frac{1}{8}$