

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 \end{aligned}$$

と変形できるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 30x^2 + 70x - 50 \\ &= 2(2x-5)\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

となり、 $f'(x) = 0$ を満たすのは

$$x = \frac{5}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

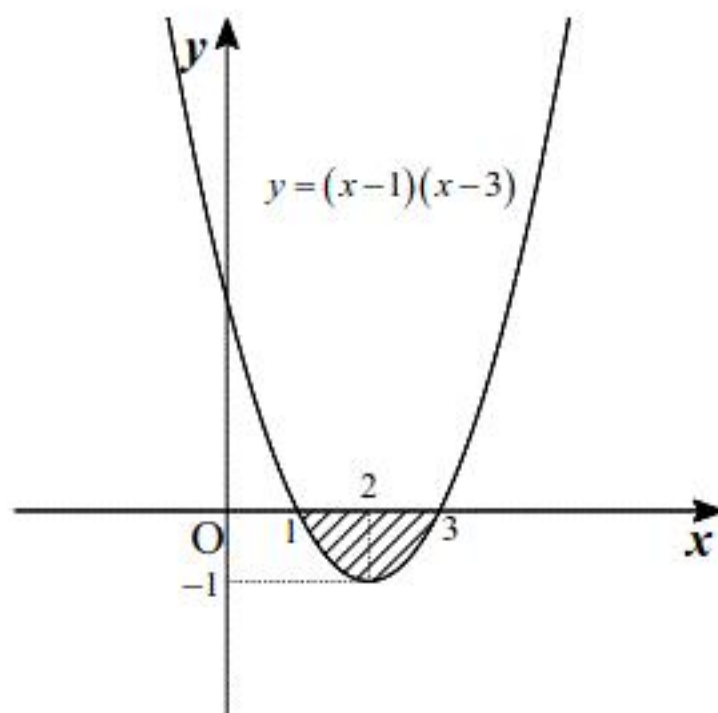
である。よって、増減表は次のようになる。

x	...	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	...	$\frac{5}{2}$	...	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{5}{2}$ で極大値 $\frac{9}{16}$ を、 $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ で極小値 -1 をとる。

$$(\text{答}) \text{ 極大値: } \frac{9}{16} \left(x = \frac{5}{2} \right), \text{ 極小値: } -1 \left(x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$y = (x-1)(x-3)$ のグラフは、 $x=1, 3$ で x 軸と交わり、下に凸な放物線である。これを図示すると以下のようなになる。



$y = (x-1)(x-3)$ を x について解くと

$$y = (x-1)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+1}$$

となる。ここで

$$\begin{cases} x_+ = 2 + \sqrt{y+1} \\ x_- = 2 - \sqrt{y+1} \end{cases}$$

とおくと、求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_{-1}^0 x_+^2 dy - \pi \int_{-1}^0 x_-^2 dx &= \pi \int_{-1}^0 \left\{ (2 + \sqrt{y+1})^2 - (2 - \sqrt{y+1})^2 \right\} dy \\ &= \pi \int_{-1}^0 8(y+1)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 8\pi \left[\frac{2}{3} (y+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

(1)

倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= PQ \cdot PR \\
 &= \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta} \sqrt{(\cos 2\theta - 1)^2 + \sin^2 2\theta} \\
 &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \sqrt{2 - 2 \cos 2\theta} \\
 &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \theta} \\
 &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad (\because 0 < \theta < \pi)
 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad F(\theta) = 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta$$

$$\text{または } F(\theta) = 2\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 - \cos 2\theta)}$$

(2)

$F(\theta)$ をさらに倍角の公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \\
 &= 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= 8 \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= 8 \cos \frac{\theta}{2} - 8 \cos^3 \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \pi$ において $F(\theta)$ を微分すれば

$$\begin{aligned}
 F'(\theta) &= -4 \sin \frac{\theta}{2} + 12 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
 &= 12 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned}$$

となり、 $F'(\theta) = 0$ とすると、半角の公式より

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos \theta}{2} &= \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

となる。 $\cos \theta$ は $0 < \theta < \pi$ において単調減少するから、 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ を満たす θ は $0 < \theta < \pi$ の範

囲にただ1つ存在し、それを α とおくと

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cos \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

である。このとき、 $0 < \theta < \pi$ における $F(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	(0)	...	α	...	(π)
$F'(\theta)$		+	0	-	
$F(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減表より、 $F(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で極大かつ最大となる。また、 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{3} \\
 \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

となるから、求める最大値は

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) &= 8 \cos \frac{\alpha}{2} - 8 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \\
 &= \frac{16}{9} \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{16}{9} \sqrt{3}$$

4

(1)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{(2\sqrt{5})^2 + 6^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 6} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2)

$0 < \angle ABC < \pi$ より $\sin \angle ABC > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{CA}{\sin \angle ABC} &= 2R \\ \therefore R &= \sqrt{10}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{10}$$

(3)

O から平面 ABC に下した垂線の足を H とすると

$$OA = OB = OC = 5$$

$$\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$$

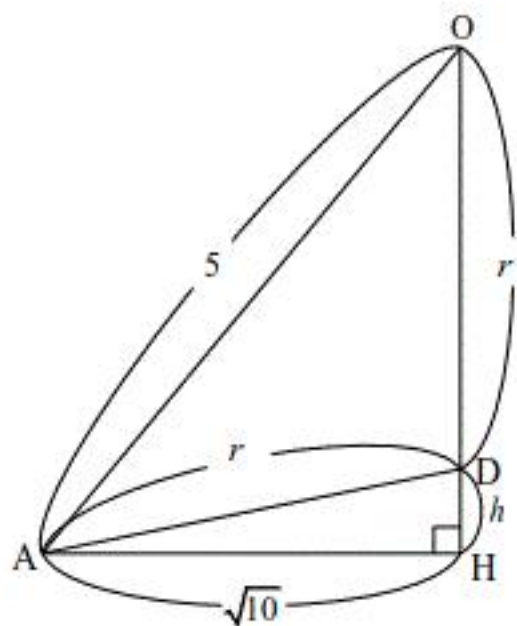
より、 $\triangle OHA \equiv \triangle OHB \equiv \triangle OHC$ である。よって

$$HA = HB = HC$$

となるから、 H は $\triangle ABC$ の外心である。これより

$$HA = HB = HC = \sqrt{10}$$

となる。ここで、四面体 $OABC$ の外接球の中心を D とし、 $DH = h$ とおく。



$\triangle OAH$ および $\triangle ADH$ において三平方の定理より

$$\begin{cases} 5^2 = (\sqrt{10})^2 + (r+h)^2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ r^2 = h^2 + (\sqrt{10})^2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。 $\textcircled{1}$ より

$$(r+h)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow r+h = \sqrt{15} \quad (\because r, h > 0)$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{15} - r$$

となり、これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$r^2 = (\sqrt{15} - r)^2 + 10$$

$$\Leftrightarrow r^2 = r^2 - 2\sqrt{15}r + 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{15}r = 25$$

$$\therefore r = \frac{5}{6}\sqrt{15}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{5}{6}\sqrt{15}$$

(1)

操作を1回行った結果、袋Aに白玉1個と赤玉1個が入っているのは、袋A, Bから同じ色の玉を取り出す場合で、その場合の数は2通りである。また、すべての取り出し方は

$$2^2 = 4 \text{ 通り}$$

で、これらは同様に確からしいから

$$p_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。操作を1回行った結果、袋Aに白玉が2個入っているのは、袋Aから赤玉を、袋Bから白玉を取り出す場合の1通りであるから

$$q_1 = \frac{1}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{2}, q_1 = \frac{1}{4}$$

(2)

操作を $n+1$ 回行った結果、袋Aに白玉1個と赤玉1個が入っているのは、操作を n 回行ったあと、袋Aに白玉2個または赤玉2個が入っている場合、または、袋Aに白玉1個と赤玉1個が入っていて、 $n+1$ 回目の操作で袋Aと袋Bから同じ色の玉を取り出す場合のいずれかであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (q_n + r_n) + \frac{1}{2} p_n \\ &= (1 - p_n) + \frac{1}{2} p_n \quad (\because p_n + q_n + r_n = 1) \\ &= -\frac{1}{2} p_n + 1 \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{1}{2} p_n + 1$$

(3)

(2)で求めた漸化式を変形すると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\frac{1}{2} p_n + 1 \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{2}{3} &= -\frac{1}{2} \left(p_n - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

となるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{2}{3} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって

$$\begin{aligned} p_n - \frac{2}{3} &= \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

である。また、操作を $n+1$ 回行った結果、袋Aに白玉が2個入っているのは、操作を n 回行ったあと、袋Aに白玉1個と赤玉1個が入っていて、 $n+1$ 回目の操作で袋Aから赤玉を、袋Bから白玉を取り出す場合であるから

$$q_{n+1} = \frac{1}{4} p_n$$

となる。これと $p_{n+1} + q_{n+1} + r_{n+1} = 1$ より

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 1 - p_{n+1} - q_{n+1} \\ &= 1 - \left(-\frac{1}{2} p_n + 1 \right) - \frac{1}{4} p_n \\ &= \frac{1}{4} p_n \\ &= q_{n+1} \end{aligned}$$

とわかる。また

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - p_1 - q_1 \\ &= \frac{1}{4} \\ &= q_1 \end{aligned}$$

より

$$q_n = r_n \quad (n \geq 1)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} q_n &= r_n \\ &= \frac{1}{2} (1 - p_n) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{3} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}, q_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}, r_n = \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$