

(1)

 $2 \leq k \leq n$ に対して、

$$|a_k - a_{k-1}| \geq 1$$

であり、

$$a_1 \geq 1$$

であるから、

$$S \geq 1+1+\cdots+1=n$$

である。ここで、 $a_k = k$ ($1 \leq k \leq n$) とすれば $S = n$ であるから、 n は確かに S の最小値であり、 $[1, 2, \dots, n]$ は S が最小値を取るような順列の1つである。また、 $n=5$ のとき、

$$S = 4 + |1-4| + |5-1| + |2-5| + |3-2| = 15$$

となるので、 $S=15$ となる順列の一つは $[4, 1, 5, 2, 3]$ である。(答) $[1, 2, \dots, n]$ のとき最小値 n

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = [4, 1, 5, 2, 3]$$

($[4, 2, 5, 1, 3], [5, 1, 4, 2, 3], [5, 2, 4, 1, 3]$ でも可)

(2)

[1] 必要性について

 $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$ が整数のとき、

$$\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = k \quad (k \text{ は整数}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

とすると、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{q}{p}m = kq - n$$

である。 $\frac{m}{p}$ は既約分数なので m と p は互いに素であり、また、 $kq - n$ は整数であるから、 q は p の倍数となる。また、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{p}{q}n = kp - m$$

より、同様に p は q の倍数であるから、 $p = q$ が成り立つ。またこのとき、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{m}{p} + \frac{n}{p} = k$$

$$\Leftrightarrow m + n = kp$$

であるから、 p は $m+n$ の約数である

[2] 十分性について

 $p = q$ かつ p が $m+n$ の約数のとき、

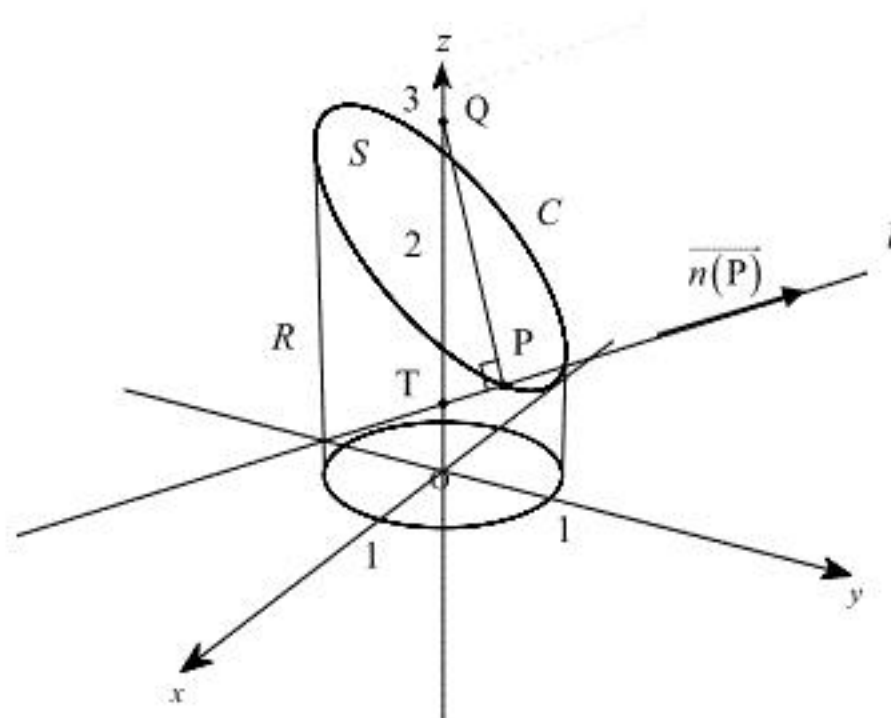
$$\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = \frac{m+n}{p}$$

より、 $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$ は整数となる。

以上[1], [2]より題意は示された。

(証明終)

2
(1)



点Pは円筒 $x^2 + y^2 = 1$ 上かつ平面 $y + z - 2 = 0$ 上の点であるから、 $y = p$ を代入して、

$$x = \pm\sqrt{1-p^2}, z = -p+2$$

である。よって、 $\overrightarrow{OP} = (\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p+2)$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = (\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p+2)$$

(2)

直線 l と z 軸の交点を $T(0, 0, t)$ とすると、直線 l は平面 OPQ 上にあるから、

$$\overrightarrow{n(P)} \parallel \overrightarrow{TP}$$

が成り立ち、

$$\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OT} = (\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p+2-t)$$

と表せる。ここで $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$ より、 $p \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned} (\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p-1) \cdot (\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p+2-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1-p^2+p^2+(-p-1)(-p+2-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -p+2-t &= \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n(P)} &= k(\pm\sqrt{1-p^2}, p, -p+2-t) \\ &= k\left(\pm\sqrt{1-p^2}, p, \frac{1}{p+1}\right) \quad (k \text{ は実数}) \end{aligned}$$

と表すことができ、 $|\overrightarrow{n(P)}| = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} k^2 \left(1-p^2+p^2+\left(\frac{1}{p+1}\right)^2 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{(p+1)^2}{p^2+2p+2} \\ \Leftrightarrow k &= \pm \frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p+2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n_z \geq 0$ であるから、

$$n_z = \frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p+2}} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{1}{\sqrt{p^2+2p+2}}$$

と求まる。一方、 $p = -1$ のとき、点Pの座標は $P(0, -1, 3)$ であり、直線PQは y 軸と平行にな

るから、直線 l は z 軸と平行になる。よって、 $\overrightarrow{n(P)} = (0, 0, \pm 1)$ であり、 $n_z \geq 0$ より、 $n_z = 1$ と

なる。これより、 $n_z = \frac{1}{\sqrt{p^2+2p+2}}$ は $p = -1$ でも成立する。以上より、 $n_z = \frac{1}{\sqrt{p^2+2p+2}}$ である。

$$(\text{答}) \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{p^2+2p+2}}$$

(3)

(2)より、 $p \neq -1$ のとき

$$\overrightarrow{n(P)} = \frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p+2}} \left(\pm\sqrt{1-p^2}, p, \frac{1}{p+1} \right)$$

であるので、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{n(P)}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{n(P)}|} \\ &= \frac{\frac{p+1}{\sqrt{p^2+2p+2}} \cdot \left(1-p^2+p^2+\frac{-p+2}{p+1} \right)}{\sqrt{1-p^2+p^2+(-p+2)^2} \cdot 1} \\ &= \frac{3}{\sqrt{p^2+2p+2} \sqrt{p^2-4p+5}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{p^4-2p^3-p^2+2p+10}} \end{aligned}$$

と表せる。また、 $p = -1$ のとき

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{n(P)}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{n(P)}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

である。よって、任意の p に対して $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{p^4-2p^3-p^2+2p+10}}$ である。

$f(p) = p^4 - 2p^3 - p^2 + 2p + 10$ とおくと、 $f(p)$ が最大るとき、 $\cos \theta$ は最小になり、 θ は最大となる。

$$\begin{aligned} f'(p) &= 4p^3 - 6p^2 - 2p + 2 \\ &= 2(2p-1)(p^2-p-1) \\ &= 2(2p-1) \left(p - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(p - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

であり、 $-1 \leq p \leq 1$ より、 $f'(p) = 0$ となるのは $p = \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ のときであるから、増減表は次のようになる。

p	-1	...	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(p)$		-	0	+	0	-	
$f(p)$	10	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{169}{16}$	$\searrow$	

したがって、 $f(p)$ は $p = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{169}{16}$ をとり、このとき $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{\frac{169}{16}}} = \frac{12}{13}$ で θ は最大

となる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{12}{13}$$

(1)

$y=f(x)$ を y 軸に関して対称に移動させたグラフは $y=f(-x)$ であり、これを x 軸に関して対称に移動させたグラフは $y=-f(-x)$ であるから、

$$\begin{aligned} g(x) &= -f(-x) \\ &= -\{(-x)^2 + 2(-x) - c\} \\ &= -x^2 + 2x + c \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad g(x) = -x^2 + 2x + c$$

(2)

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (-x^2 + 2x + c) - (x^2 + 2x - c) \\ &= -2x^2 + 2c \\ &= -2(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

より、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は $x=\pm\sqrt{c}$ であり、 $-\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}$ で $g(x) \geq f(x)$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= -2 \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) dx \\ &= (-2) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \{\sqrt{c} - (-\sqrt{c})\}^3 \\ &= \frac{8}{3} c \sqrt{c} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{8}{3} c \sqrt{c}$$

(3)

$$f(x) = \{x - (-1 + \sqrt{1+c})\} \{x - (-1 - \sqrt{1+c})\}$$

より、 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は $x=-1 \pm \sqrt{1+c}$ であり、 $f(x)$ は下に凸な関数であるから、

$$\begin{aligned} T &= - \int_{-1-\sqrt{1+c}}^{-1+\sqrt{1+c}} f(x) dx \\ &= - \int_{-1-\sqrt{1+c}}^{-1+\sqrt{1+c}} \{x - (-1 + \sqrt{1+c})\} \{x - (-1 - \sqrt{1+c})\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{(-1 + \sqrt{1+c}) - (-1 - \sqrt{1+c})\}^3 \\ &= \frac{4}{3} (1+c) \sqrt{1+c} \end{aligned}$$

と求まる。よって、 $S=T$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} c \sqrt{c} &= \frac{4}{3} (1+c) \sqrt{1+c} \\ \Leftrightarrow 2c^{\frac{3}{2}} &= (1+c)^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{3}} c &= 1+c \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$$

(1)

辺 AB が最小辺なので $\angle C$ は最小角であり,

$$0^\circ < \angle C \leq 60^\circ$$

$$\Rightarrow 0 < \sin C \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。したがって、 $b \leq a$ であることを用いれば,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C \leq \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

辺 BC が最大辺なので $\angle A$ は最大角であり、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であることから,

$$60^\circ \leq \angle A < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin A < 1$$

となる。したがって、 $c \leq b$ であることを用いれば,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \geq \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

最初に5のカードを引き、次に5枚のカードの中から1のカードを引けばよいので、求める確率は、

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

である。

(答) $\frac{1}{25}$

(2)

最初に4のカードを引くと、次に残るカードは1~4の4枚であり、その中から1のカードを引けばよいので、求める確率は $\frac{1}{4}$ である。

(答) $\frac{1}{4}$

(3)

最初に k ($1 \leq k \leq 5$)のカードを引いたとき、次に残るのは1~ k の k 枚のカードであるから、 $X=Y$ となる確率は、

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{137}{300}$$

である。 $X < Y$ となることはないので、求める確率は、

$$1 - \frac{137}{300} = \frac{163}{300}$$

である。

(答) $\frac{163}{300}$

(4)

$X=k$ のとき $Y=1$ である確率は $\frac{1}{k}$ なので、求める確率は、

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{k} = \frac{137}{300}$$

である。

(答) $\frac{137}{300}$

(5)

$X=3$ かつ $Y=1$ である確率は $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ なので、求める確率は、

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{137}{300}} = \frac{20}{137}$$

である。

(答) $\frac{20}{137}$