

$$y' = 2x + a - \frac{3a^2}{x} = \frac{(x-a)(2x+3a)}{x}$$

であるから、 $x, a > 0$ であることに注意すると、増減表は次のように書ける。

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	$a^2(2-3\log a)$	$\nearrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow +0} y = \infty$ である。したがって、 $a > 0$ であることに注意すれば、求める a の範囲は、

$$a^2(2-3\log a) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2-3\log a \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log a \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow a \geq e^{\frac{2}{3}}$$

となる。

(答) $a \geq e^{\frac{2}{3}}$

曲線 $y=e^{-x^2}$ について,

$$y' = (-x^2)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

であるから, 増減表は次のようになる。

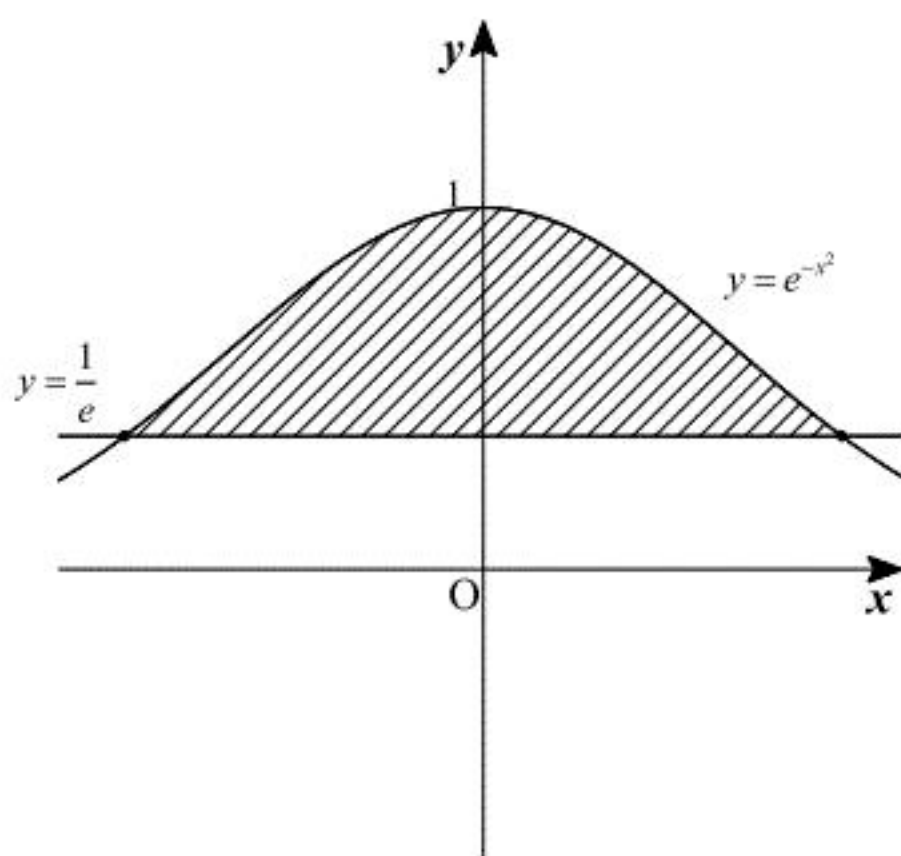
x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$

また,

$$e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$$

ゆえ, この曲線は y 軸に関して対称である。これに加えて $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ であることに

注意すると, 曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=\frac{1}{e}$ のグラフは次のように書ける。ただし, これらで囲まれる領域を斜線で表す。



ここで,

$$y=e^{-x^2} \Leftrightarrow x^2 = -\log y$$

であるから, 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 dy \\ &= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\log y) dy \end{aligned}$$

と表せる。また,

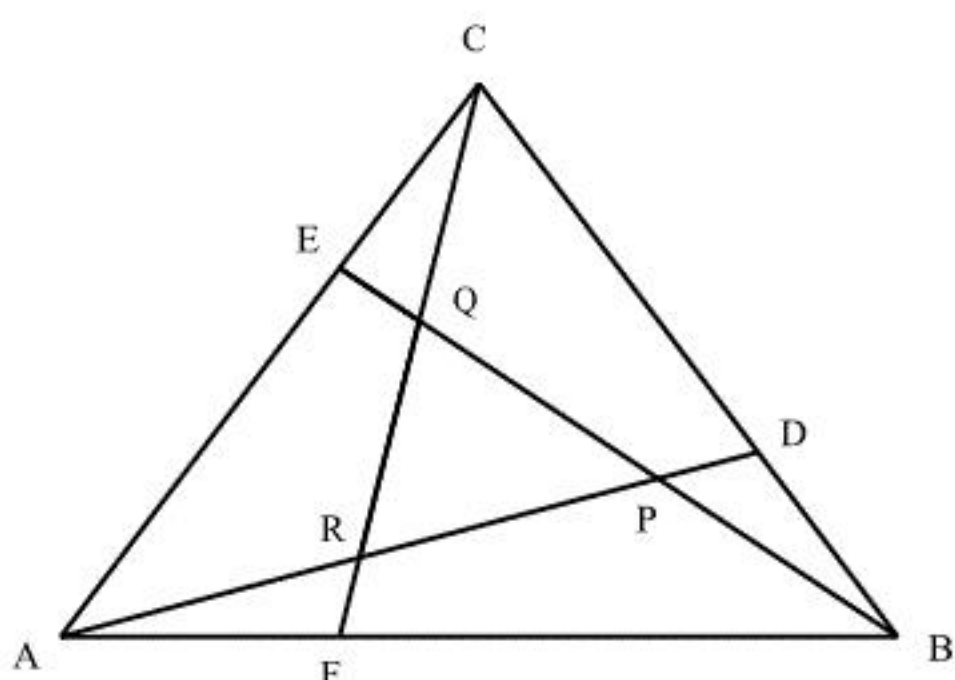
$$\begin{aligned} \int \log y dy &= \int (y)' \log y dy \\ &= y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= y \log y - y + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} V &= -\pi \left[y \log y - y \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \left(1 - \frac{2}{e} \right) \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\left(1 - \frac{2}{e} \right) \pi$



Pは直線AD上にあるので、実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AD} = s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また直線BE上にもあるので、実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AE} = (1-t)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{2}$$

とも表せる。したがって、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから、①、②より、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s = 1-t \\ \frac{1}{3}s = \frac{2}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{6}{7} \\ t = \frac{3}{7} \end{cases}$$

と求まるので、 $\ell = \frac{4}{7}, m = \frac{2}{7}$ である。

(答) $\ell = \frac{4}{7}, m = \frac{2}{7}$

対称性より、

$$\overrightarrow{CR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR} \\ &= \overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}(-\overrightarrow{AC}) + \frac{2}{7}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AR} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD}$ より、

$$AR:RP:RD = 3:3:1$$

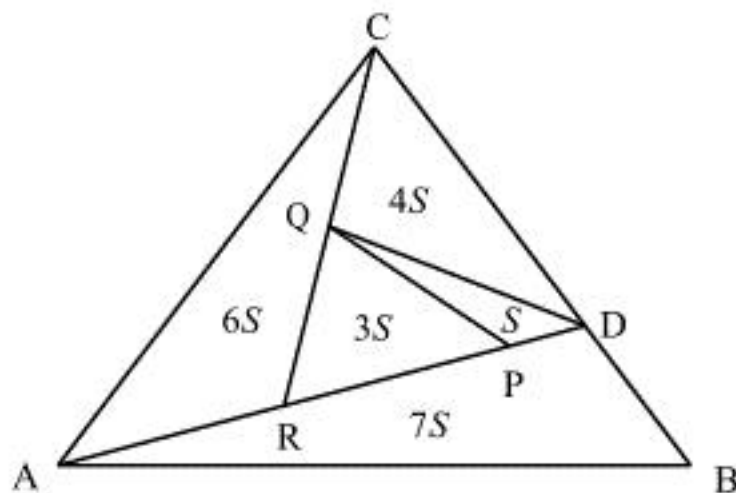
となる。また対称性から、

$$CQ:QR:RF = 3:3:1$$

である。 $\triangle PQR$ の面積を $3S$ とすると、

$$\triangle DPQ = \frac{DP}{PR} \triangle PQR = \frac{1}{3} \cdot 3S = S$$

と表せる。同様に考えていくことで、各部分の面積は次のようになる。



したがって、 $\triangle ABC = 21S$ であるから、

$$\triangle PQR = \frac{3}{21} \triangle ABC = \frac{1}{7}$$

となる。

(答) $\triangle PQR = \frac{1}{7}$

(1)

ド・モアブルの定理より

$$\alpha^7 = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

であるから,

$$\alpha^7 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

であり, $\alpha \neq 1$ より, $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1$ となる。

(証明終)

(2)

$$\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 1$$

より,

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

である。したがって,

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^6}{\alpha^7} = \alpha^6$$

$$\bar{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^5$$

$$\bar{\alpha^4} = \frac{1}{\alpha^4} = \alpha^3$$

となるから,

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4) + (\bar{\alpha} + \bar{\alpha^2} + \bar{\alpha^4}) \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

と求まる。また,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\bar{\alpha} + \bar{\alpha^2} + \bar{\alpha^4}) \\ &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^4)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3) \\ &= \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^5 + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^7 \\ &= 1 + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha + 1 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 (\because \alpha^7 = 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $z + \bar{z} = -1, z\bar{z} = 2$

(3)

(2)より $z, \bar{z}$ は2次方程式

$$t^2 + t + 2 = 0$$

の2解であり, これを解くと,

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

となる。ここで, z の虚数部分について,

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} &= \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \\ &> \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \left(-\frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{4\pi}{7} > 0 \end{aligned}$$

となるので, $z = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ である。(答) $\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$

(1)

$$\frac{dx}{dt} = \sin t$$

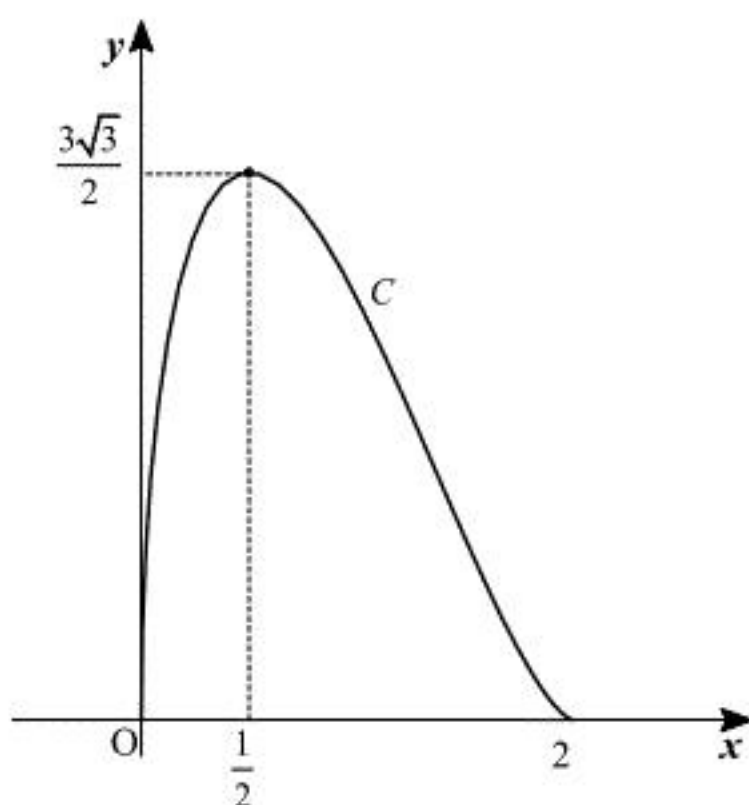
$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos t + 2 \cos 2t = 2 \cos t + 2(2 \cos^2 t - 1) = 2(2 \cos t - 1)(\cos t + 1)$$

より、 $\frac{dx}{dt} = 0$ となるのは $t = 0, \pi$ のときであり、 $\frac{dy}{dt} = 0$ となるのは $t = \frac{\pi}{3}, \pi$ のときであるから、

増減表は次のように書ける。

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$\frac{dx}{dt}$	$\nearrow$	+	+	+	$\nearrow$
x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	2
$\frac{dy}{dt}$	$\nearrow$	+	0	-	$\nearrow$
y	0	$\uparrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	0

したがって、 y 座標が最大となる点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ であり、曲線 C の概形は以下のようになる。



(答) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 概形 前図

(2)

求める面積は

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 y dx &= \int_0^\pi y \frac{dx}{dt} dt \\
 &= \int_0^\pi (2 \sin t + \sin 2t) \sin t dt \\
 &= \int_0^\pi (2 \sin^2 t + 2 \sin^2 t \cos t) dt \\
 &= \int_0^\pi \left\{ (1 - \cos 2t) + 2 \sin^2 t (\sin t)' \right\} dt \\
 &= \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{2}{3} \sin^3 t \right]_0^\pi \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

である。

(答) π