

(1)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geq 0$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) dx \\ &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき常に $\sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) dx \\ &= \left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{2}$

(3)

[1] $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$0 \leq x \leq \theta$ のとき $\sin(\theta - x) \geq 0$, $\theta \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin(\theta - x) \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^{\theta} \sin(\theta - x) dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x - \theta) dx \\ &= \left[\cos(\theta - x) \right]_0^{\theta} + \left[-\cos(x - \theta) \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \cos\theta - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \\ &= 2 - \cos\theta - \sin\theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sin\theta - \cos\theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = 0 \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。

[2] $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき

常に $\sin(\theta - x) \geq 0$ であるから,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta - x) dx \\ &= \left[\cos(\theta - x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\theta \\ &= \sin\theta - \cos\theta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \cos\theta + \sin\theta \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$f'(\theta) = 0 \quad (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi)$$

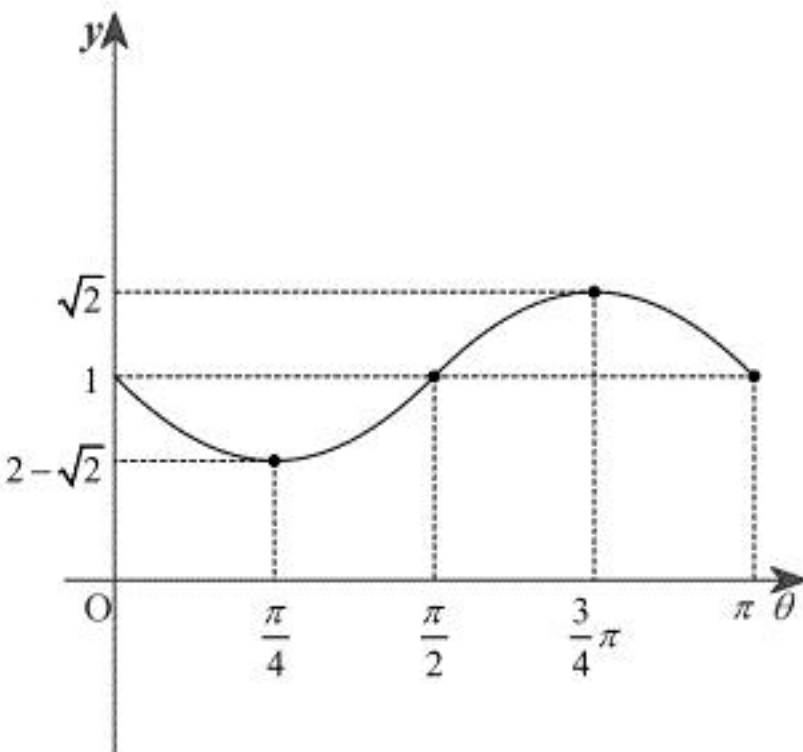
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{3}{4}\pi$$

となる。

以上[1], [2]より, $0 \leq \theta \leq \pi$ での増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(\theta)$	$\searrow$	-	0	+	1	+	0	-	$\searrow$
$f(\theta)$	1	$\searrow$	$2 - \sqrt{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

よって, $y = f(\theta)$ のグラフは以下のようになる。



上図より, $f(\theta)$ は

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最大値 } \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最小値 } 2 - \sqrt{2}$$

をとる。

(答) グラフは前図

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき最大値 } \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最小値 } 2 - \sqrt{2}$$

(1)

半角公式より

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(3+1) + 2\sqrt{3} \cdot 1}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(2)

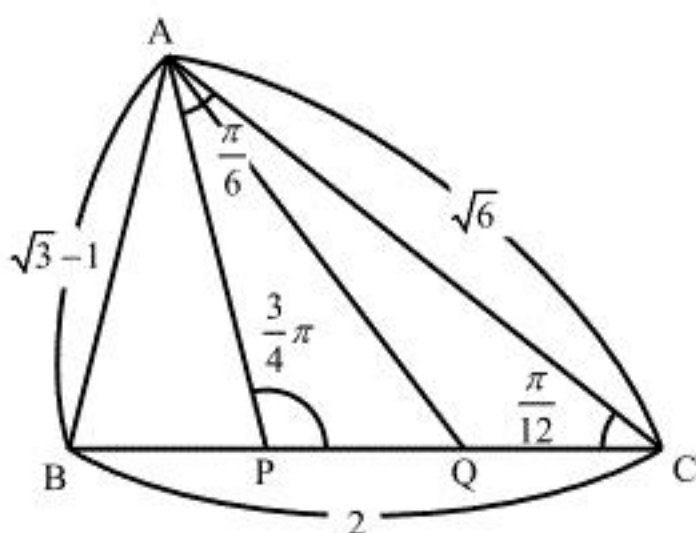
 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB} \\ &= \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \\ &= \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3} - 1$$

(3)

 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

であり、 $0 < \angle BAC < \pi$ から

$$\angle BAC = \frac{\pi}{4}$$

となる。 $\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC$ であるから、

$$\begin{aligned}\angle PAC &= \frac{2}{3} \angle BAC \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\angle APC &= \pi - \angle PAC - \angle ACB \\ &= \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{3}{4} \pi\end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle APC$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin \angle APC} &= \frac{PC}{\sin \angle PAC} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} &= \frac{PC}{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow PC &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3}$$

(1)

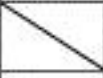
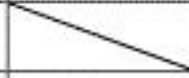
$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\log x)' \cdot \sqrt{x} - (\log x) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

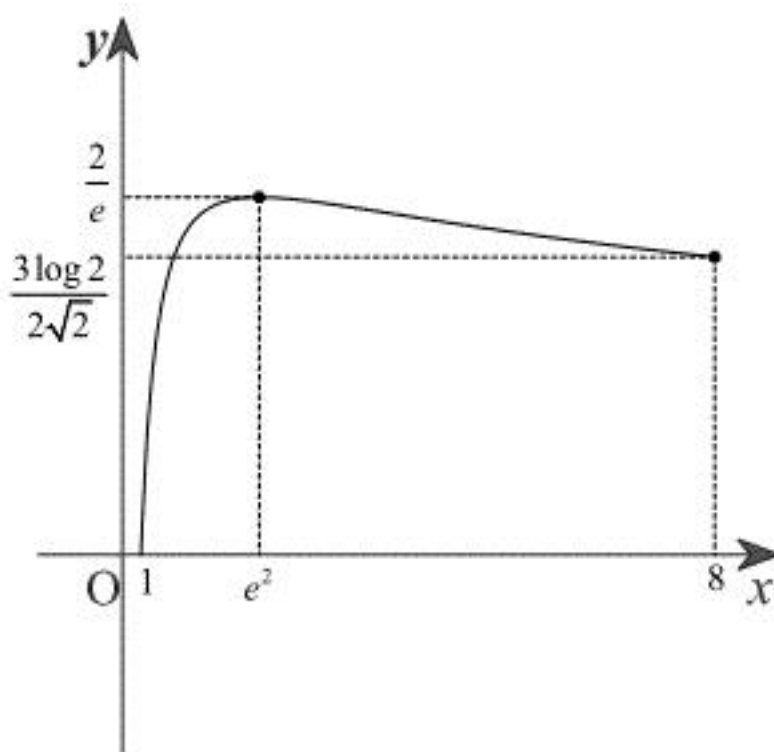
となる。これと $2x\sqrt{x} > 0$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 - \log x &= 0 \\ \therefore x &= e^2 \end{aligned}$$

となる。よって、 $1 \leq x \leq 8$ での増減表は以下のようになる。

x	1	...	e^2	...	8
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		$\frac{2}{e}$		$\frac{3\log 2}{2\sqrt{2}}$

また、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって上図より、 $f(x)$ は

$x = e^2$ のとき最大値 $\frac{2}{e}$, $x = 1$ のとき最小値 0

をとる。

(答) $x = e^2$ のとき最大値 $\frac{2}{e}$, $x = 1$ のとき最小値 0

(2)

上図より、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx \\ &= \pi \int_1^e (\log x)^2 \cdot (\log x)' dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^e \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{\pi}{3}$

(1)

各桁の数字を先頭から順に $n_1, n_2, \dots, n_{10}$ とする。 n_1 は 1, 2, 3, 4 のうちの 1 つであり、残りの 3 つは $n_2 \sim n_{10}$ のどこかに入り、その他の桁にはすべて 0 が入るから、整数は全部で

$$4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2016 \text{ (個)}$$

できる。

(答) 2016 個

(2)

$n_1 = 1$ と固定し、0 が 4 つ続く位置で場合分けする。連続する 4 個の 0 が

[1] $n_2 \sim n_5$ のとき

このとき、 n_6 は 2, 3, 4 の 3 通り、残りの 0 以外の 2 つは $n_7 \sim n_{10}$ のどこかに入るから、

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ (個)}$$

できる。

[2] $n_7 \sim n_{10}$ のとき

このとき、 n_6 は 2, 3, 4 の 3 通り、残りの 0 以外の 2 つは $n_2 \sim n_5$ のどこかに入るから、

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36 \text{ (個)}$$

できる。

[3] $n_3 \sim n_6$ のとき

このとき、 n_2 は 2, 3, 4 の 3 通り、 n_7 は 2 通り、 $n_8 \sim n_{10}$ はどこに 0 以外の数字が入るかで 3 通りあるから、

$$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ (個)}$$

できる。また、 $n_4 \sim n_7$, $n_5 \sim n_8$, $n_6 \sim n_9$ のときも同様に 18 (個) ずつできる。

以上[1], [2], [3]より、 $n_1 = 1$ のときは題意を満たす整数は

$$36 + 36 + 18 \cdot 4 = 144 \text{ (個)}$$

出来る。ここで、 $n_1 = 2, 3, 4$ のときも同様であるから、求める個数は

$$144 \cdot 4 = 576 \text{ (個)}$$

である。

(答) 576 個

(1)

$\left| \frac{w-i}{z-i} \right|$ に $w = \frac{\alpha-i}{\alpha+i} \bar{z} + \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha+i} i$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \left| \frac{w-i}{z-i} \right| &= \left| \frac{\left(\frac{\alpha-i}{\alpha+i} \bar{z} + \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha+i} i \right) - i}{z-i} \right| \\ &= \left| \frac{(\alpha-i)\bar{z} + (\alpha+\bar{\alpha})i - (\bar{\alpha}+i)i}{(\bar{\alpha}+i)(z-i)} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha\bar{z} - \bar{z}i + \alpha i + 1}{\alpha z + zi - \bar{\alpha}i + 1} \right| \\ &= \left| \frac{\overline{\alpha z + zi - \bar{\alpha}i + 1}}{\alpha z + zi - \bar{\alpha}i + 1} \right| \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1

(2)

$$z-w = (z-i) - (w-i)$$

であるから,

$$\frac{z-w}{\alpha-i} = \frac{z-i}{\alpha-i} - \frac{w-i}{\alpha-i}$$

と表せる。ここに $w = \frac{\alpha-i}{\alpha+i} \bar{z} + \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha+i} i$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{z-w}{\alpha-i} &= \frac{z-i}{\alpha-i} - \frac{w-i}{\alpha-i} \\ &= \frac{z-i}{\alpha-i} - \frac{\frac{\alpha-i}{\alpha+i} \bar{z} + \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{\alpha+i} i - i}{\alpha-i} \\ &= \frac{z-i}{\alpha-i} - \frac{\bar{z}+i}{\alpha+i} \\ &= \frac{z-i}{\alpha-i} - \overline{\left(\frac{z-i}{\alpha-i} \right)} \end{aligned}$$

となる。 $z \neq i$ より $\frac{z-w}{\alpha-i} \neq 0$ であるため $\frac{z-w}{\alpha-i}$ は純虚数であり, $\frac{z-w}{\alpha-i}$ の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) は

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

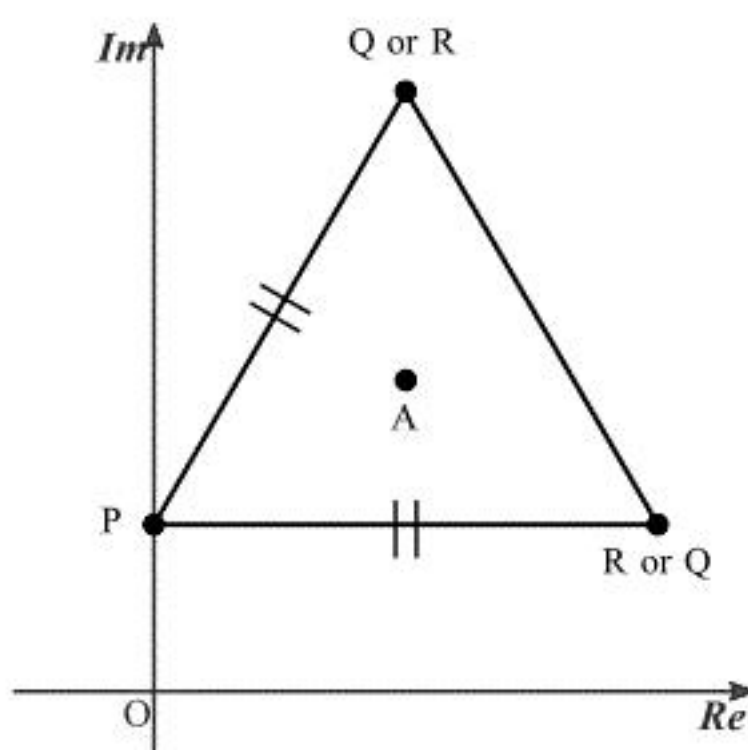
である。

(答) $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

(3)

(1)より $|\overline{RP}| = |\overline{QP}|$, (2)より $\overline{RQ} \perp \overline{PA}$ である。また, $\alpha-i = \sqrt{3}+i$ より $\overline{PA}$ が x 軸となす角が

30° であるとわかるから, P, Q, R, A の位置は下図のようになる。



したがって, $A(\alpha)$ を中心として, $P(i)$ を $\pm \frac{2}{3}\pi$ 回転した点が $Q(z)$ であるから

$$\begin{aligned} z-\alpha &= \left\{ \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) \right\} (i-\alpha) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-\sqrt{3}-i) \\ &= 2i, \sqrt{3}-i \end{aligned}$$

$$\therefore z = \sqrt{3}+4i, 2\sqrt{3}+i$$

となる。

(答) $z = \sqrt{3}+4i, 2\sqrt{3}+i$