

(1)

$$n^2 - 40n + 319 = (n-11)(n-29)$$

であるから、これが正の整数となるとき、 $n \leq 10$ または $n \geq 30$ である。また、 $n \leq 9, n \geq 31$ の時、 $n^2 - 40n + 319$ は 2 つの 2 以上の整数の積となるので素数ではない。よって、 $n^2 - 40n + 319$ が素数になるとすれば $n = 10, 30$ のときである。

ここで、 $n = 10, 30$ のとき、

$$(10-11)(10-29) = 19, (30-11)(30-29) = 19$$

となりどちらも素数となるので適する。したがって題意は示された。

(証明終)

(2)

背理法を利用して、103 が素数であることを示す。すなわち、103 が素数でないと仮定して矛盾を導く。103 が素数でないとすると、2 つの 2 以上の自然数 n, m を用いて、

$$103 = n \cdot m$$

と表すことができる。ここで、10 以下の正の素数である 2, 3, 5, 7 は 103 の約数ではないため、2 以上 10 以下の数は 103 の約数にはならない。よって、 $m \geq 11, n \geq 11$ であるが、このとき

$$nm \geq 121$$

となるから矛盾する。したがって仮定が誤りであるから、背理法より 103 が素数となることが示された。

(証明終)

(1)

$y = f(x)$, $y = g(x)$ から y を消去して

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + d$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{4} - d = 0$$

$$\Leftrightarrow x = d + \frac{1}{4}$$

となる。よって、交点の x 座標は $d + \frac{1}{4}$ となり、交点の座標は

$$\left(d + \frac{1}{4}, \left(d + \frac{1}{4}\right)^2\right) = \left(d + \frac{1}{4}, d^2 + \frac{d}{2} + \frac{1}{16}\right) \text{ となる。}$$

また、 $x = a$ における $y = f(x)$ の接線の方程

$$y = f'(x) = 2x \text{ より,}$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow y = 2a(x - a) + a^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$

となる。

$$\text{(答) 交点: } \left(d + \frac{1}{4}, d^2 + \frac{d}{2} + \frac{1}{16}\right), \text{ 接線の方程式: } y = 2ax - a^2$$

(2)

$x = a$ における $y = f(x)$ の接線 $y = 2ax - a^2$ が $y = g(x)$ に接するとき、

$$2ax - a^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + d \Leftrightarrow x^2 - (2a + 1)x + a^2 + d + \frac{1}{4} = 0$$

の判別式を D とすると、 $D = 0$ となる。よって、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(a^2 + d + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a - d) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = d$$

となる。これより、

$$l(x) = 2dx - d^2$$

となる。

$$\text{(答) } l(x) = 2dx - d^2$$

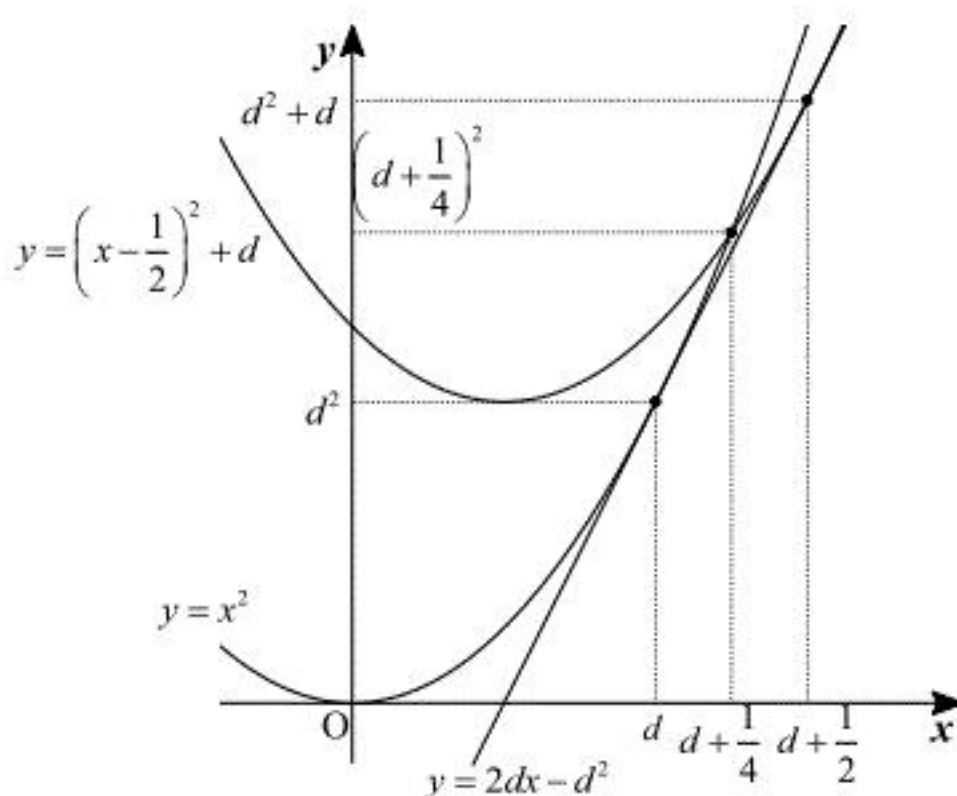
(3)

(2) の過程より、 $y = l(x)$ と $y = f(x)$ の接点の x 座標は $x = d$ である。また、 $y = l(x)$ と

$y = g(x)$ から y を消去して、

$$2dx - d^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + d \Leftrightarrow \left(x - d - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

であるから、接点の x 座標は $x = d + \frac{1}{2}$ となる。



ここで、 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフは下に凸であり、上図のように $y = l(x)$ よりも上にあるから求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_d^{d+\frac{1}{4}} \{f(x) - l(x)\} dx + \int_{d+\frac{1}{4}}^{d+\frac{1}{2}} \{g(x) - l(x)\} dx \\ &= \int_d^{d+\frac{1}{4}} (x - d)^2 dx + \int_{d+\frac{1}{4}}^{d+\frac{1}{2}} \left(x - d - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - d)^3\right]_d^{d+\frac{1}{4}} + \left[\frac{1}{3}\left(x - d - \frac{1}{2}\right)^3\right]_{d+\frac{1}{4}}^{d+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{96} \end{aligned}$$

となり d の値に依存しないことが示された。

(証明終)

(1)

$\alpha = s + ti$ とすると,

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha + r \\ &= s^3 + 3s^2ti - 3st^2 - t^3i + p(s^2 + 2sti - t^2) + q(s + ti) + r \\ &= s^3 - 3st^2 + ps^2 - pt^2 + qs + r + (3s^2t - t^3 + 2pst + qt)i \end{aligned}$$

となる。よって,

$$s^3 - 3st^2 + ps^2 - pt^2 + qs + r = 0, 3s^2t - t^3 + 2pst + qt = 0$$

となる。また,

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= (\bar{\alpha})^3 + p(\bar{\alpha})^2 + q\bar{\alpha} + r \\ &= s^3 - 3s^2ti - 3st^2 + t^3i + p(s^2 - 2sti - t^2) + q(s - ti) + r \\ &= s^3 - 3st^2 + ps^2 - pt^2 + qs + r - (3s^2t - t^3 + 2pst + qt)i \\ &= 0 \quad (\because s^3 - 3st^2 + ps^2 - pt^2 + qs + r = 0, 3s^2t - t^3 + 2pst + qt = 0) \end{aligned}$$

となる。したがって題意は示された。

(証明終)

(2)

背理法を利用して、 α, β, γ の少なくとも一つは実数であることを示す。すなわち、 α, β, γ のすべてが虚数であると仮定して矛盾を導く。(1)より3次方程式の解が虚数であるとき、それと共役な複素数も解となる。したがって、方程式の解がすべて相異なる場合、解の個数は偶数とならなければならないのでこの場合はあり得ない。次に α, β, γ のうち2つが重解となる、すなわち $\alpha, \alpha, \bar{\alpha}$ が解となる場合を考えると、解と係数の関係より

$$r = -\alpha \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} = -\alpha^2 \bar{\alpha} = -\alpha |\alpha|^2$$

となるが、 α は虚数で $\alpha \neq 0$ となるから、 $-\alpha |\alpha|^2$ も虚数となり、上の式では r が虚数となる。

しかし、 r は実数であるので重解の場合も矛盾する。したがって、仮定が誤りであるから背理法より α, β, γ の少なくとも一つは実数であることが示された。

(証明終)

(1)

S の方程式 $x^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 1$ に $y = z$ を代入すると,

$$\begin{aligned} x^2 + (z-3)^2 + (z-4)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2z^2 &= 14z - 24 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2z^2 = 14z - 24$$

である。ここで,

$$x^2 + (z-3)^2 + (z-4)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = -(2z^2 - 14z + 24)$$

となり, x は実数であるから

$$x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -(2z^2 - 14z + 24) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (z-3)(z-4) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq z \leq 4$$

となる。したがって OP が最大値をとるとき,

$$OP^2 = 14 \cdot 4 - 24 = 32$$

$$\therefore OP = 4\sqrt{2}$$

であり, OP が最小値をとるとき,

$$OP^2 = 14 \cdot 3 - 24 = 18$$

$$\therefore OP = 3\sqrt{2}$$

となる。

(答) 最大値: $4\sqrt{2}$, 最小値: $3\sqrt{2}$

(2)

直線 OC と球面 S の交点のうち, 線分 OC 上にあるものを D とし, そうでないものを E とする。点 P が点 D に一致するとき OP は最小となり, 点 E に一致するとき OP は最大となる。

$$OC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

となるので, 最大値は,

$$OP = 5 + 1 = 6$$

であり, 最小値は

$$OP = 5 - 1 = 4$$

となる。

(答) 最大値: 6, 最小値: 4

(3)

OC を底辺とみると, S 上で線分 OC からの高さが最大となるときに A が最大となる。 CP は球の半径で長さが一定であるから, $OC \perp CP$ のときに面積が最大となる。よって, A の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot OC \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

となる。また, このとき,

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$$

$$\Leftrightarrow (0, 3, 4) \cdot (x, y-3, z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y + 4z = 25$$

となる。これを球面の方程式に代入すると,

$$x^2 + (y-3)^2 + \left(\frac{25}{4} - \frac{3}{4}y - 4\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}y\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{16}(5y-11)(5y-19) = 0$$

$$\therefore x^2 = -\frac{1}{16}(5y-11)(5y-19) \geq 0$$

となる。よって,

$$(5y-11)(5y-19) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{5} \leq y \leq \frac{19}{5}$$

と求められる。以上より, 求める関係式は $3y + 4z = 25$ ($\frac{11}{5} \leq y \leq \frac{19}{5}$) である。

(答) A の最大値: $\frac{5}{2}$, y と z の関係式: $3y + 4z = 25$

(1)

$P(1, 0)$ は、玉を3個取り出して、赤玉が2個、青玉が1個であった場合の確率に等しい。よって、

$$P(1, 0) = \frac{{}_2C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{1 \cdot 3}{84} = \frac{1}{28}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(1, 0) = \frac{1}{28}$$

(2)

$P(1, 1)$ は、1回目に黄玉を取り出した後、8個の玉の中から赤玉または黄玉から1個と、青玉から1個取り出す場合の確率に等しい。よって、

$$P(1, 1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1}{{}_8C_2} = \frac{5}{21}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(1, 1) = \frac{5}{21}$$

(3)

$P(1, 2)$ は、赤、黄、青または青、黄、赤 or 黄と順番に玉を取り出す場合の確率である。したがって、

$$P(1, 2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(1, 2) = \frac{1}{6}$$

(4)

m の値で場合分けして考える。

[1] $m=0$ のとき

黄玉は4個、赤玉は2個である。黄玉は少なくとも1つは出るため、 $n=0$ のとき、 $P(m, n)=0$ となる。また、黄玉を1, 2, 3回目に出すことは可能であるため、 $n=1, 2, 3$ のとき $P(m, n) \neq 0$ となる。

[2] $m=1$ のとき

青玉は1個、赤玉は2個出すことができるため、 $n=0$ のとき、 $P(m, n) \neq 0$ となる。また、黄玉を1, 2, 3回目に出すことは可能であるため、 $n=1, 2, 3$ のとき $P(m, n) \neq 0$ となる。

[3] $m=2$ のとき

青玉は2個、赤玉は1個出すことができるため、 $n=0$ のとき、 $P(m, n) \neq 0$ となる。また、黄玉を1, 2, 3回目に出すことは可能であるため、 $n=1, 2, 3$ のとき $P(m, n) \neq 0$ となる。

[4] $m=3$ のとき

取り出す玉はすべて青玉となる。よって黄玉が出ることはないため、 $P(3, 0) \neq 0$ となり、 $n=1, 2, 3$ のとき $P(m, n)=0$ となる。

以上、[1], [2], [3], [4]より $P(m, n)=0$ となるのは、

$$(m, n) = (0, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$

の場合となる。

$$(\text{答}) \quad (m, n) = (0, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$$