

(1)

$$\log(\sin x) + \log(\cos x) = \log(\sin x \cos x) = \log\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

である。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $\sin 2x$  の最大値は、 $x = \frac{\pi}{4}$  のときで、1 である。よって、与式の最大値は、

$$\log\left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}\right) = -\log 2$$

となる。

(答)  $-\log 2$

(2)

$$\begin{aligned} \log(\sin x) - 2 \log(\sin 2x) &= \log\left(\frac{\sin x}{\sin^2 2x}\right) \\ &= \log\left(\frac{\sin x}{4 \sin^2 x \cos^2 x}\right) \\ &= -\log\{4 \sin x (1 - \sin^2 x)\} \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき、 $0 < \sin x < 1$  であり、 $f(t) = 4t(1 - t^2)$  とすると、

$$f'(t) = 4 - 12t^2 = 4(1 - 3t^2)$$

であり、 $f(t)$  の増減表は以下のようになる。

|         |   |     |                      |     |   |
|---------|---|-----|----------------------|-----|---|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ... | 1 |
| $f'(t)$ |   | +   | 0                    | -   |   |
| $f(t)$  |   | ↗   |                      | ↘   |   |

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

であり、 $f(t)$  の最大値は  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$  となる。よって、与式の最小値は、

$$-\log\left(\frac{8\sqrt{3}}{9}\right) = -3 \log 2 + \frac{3}{2} \log 3$$

となる。

(答)  $-3 \log 2 + \frac{3}{2} \log 3$

(1)

$$\beta = -1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5}{4} \pi + i \sin \frac{5}{4} \pi \right)$$

$$\gamma = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi \right)$$

となるため、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} \beta^8 \gamma^8 &= (\sqrt{2})^8 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^8 \left\{ \cos \left( \frac{5}{4} \pi \cdot 8 + \frac{2}{3} \pi \cdot 8 \right) + i \sin \left( \frac{5}{4} \pi \cdot 8 + \frac{2}{3} \pi \cdot 8 \right) \right\} \\ &= \frac{16}{81} \left( \cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right) \\ &= -\frac{8}{81} - \frac{8\sqrt{3}}{81} i \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{8}{81} - \frac{8\sqrt{3}}{81} i$$

(2)

第  $2m$  項までの和  $S_{2m}$  は、

$$\begin{aligned} S_{2m} &= 1 + \beta + \beta\gamma + \beta^2\gamma + \cdots + \beta^{m-1}\gamma^{m-1} + \beta^m\gamma^{m-1} \\ &= 1 + \beta\gamma + \beta^2\gamma^2 + \cdots + \beta^{m-1}\gamma^{m-1} + \beta + \beta^2\gamma + \beta^3\gamma^2 + \cdots + \beta^m\gamma^{m-1} \\ &= (1 + \beta)(1 + \beta\gamma + \beta^2\gamma^2 + \cdots + \beta^{m-1}\gamma^{m-1}) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\beta\gamma = \frac{\sqrt{6}}{3} \left( \cos \frac{23}{12} \pi + i \sin \frac{23}{12} \pi \right) \neq 1$$

であるから、

$$1 + \beta\gamma + \beta^2\gamma^2 + \cdots + \beta^{m-1}\gamma^{m-1} = \frac{1 - \beta^m\gamma^m}{1 - \beta\gamma}$$

となり、

$$S_{2m} = \frac{(1 + \beta)(1 - \beta^m\gamma^m)}{1 - \beta\gamma}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_{2m} = \frac{(1 + \beta)(1 - \beta^m\gamma^m)}{1 - \beta\gamma}$$

(3)

$|\beta\gamma| < 1$  であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 + \beta)(1 - \beta^m\gamma^m)}{1 - \beta\gamma} \\ &= \frac{1 + \beta}{1 - \beta\gamma} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} 1 + \beta &= -i \\ 1 - \beta\gamma &= 1 - \frac{(-1 - i)(-\sqrt{3} + 3i)}{6} = \frac{(3 - \sqrt{3})(1 + i)}{6} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1 + \beta}{1 - \beta\gamma} &= -\frac{6i}{(3 - \sqrt{3})(1 + i)} \\ &= -\frac{6i(3 + \sqrt{3})(1 - i)}{(3 - \sqrt{3})(1 + i)(3 + \sqrt{3})(1 - i)} \\ &= -\frac{6i(3 + \sqrt{3})(1 - i)}{6 \cdot 2} \\ &= -\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

となる。よって、求める実部は  $-\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$  となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

(1)

$$f(x) = e^x - \frac{e}{2}(x^2 + 1) \text{ とすると,}$$

$$f'(x) = e^x - ex$$

$$f''(x) = e^x - e$$

となる。 $f''(x) = e^x > 0$  より、 $f''(x)$  は単調増加して、

$$f''(1) = e - e = 0$$

であるから、 $x < 1$  のとき  $f''(x) < 0$ 、 $x > 1$  のとき  $f''(x) > 0$  となるため、 $f'(x)$  の増減表は以下のようなになる。

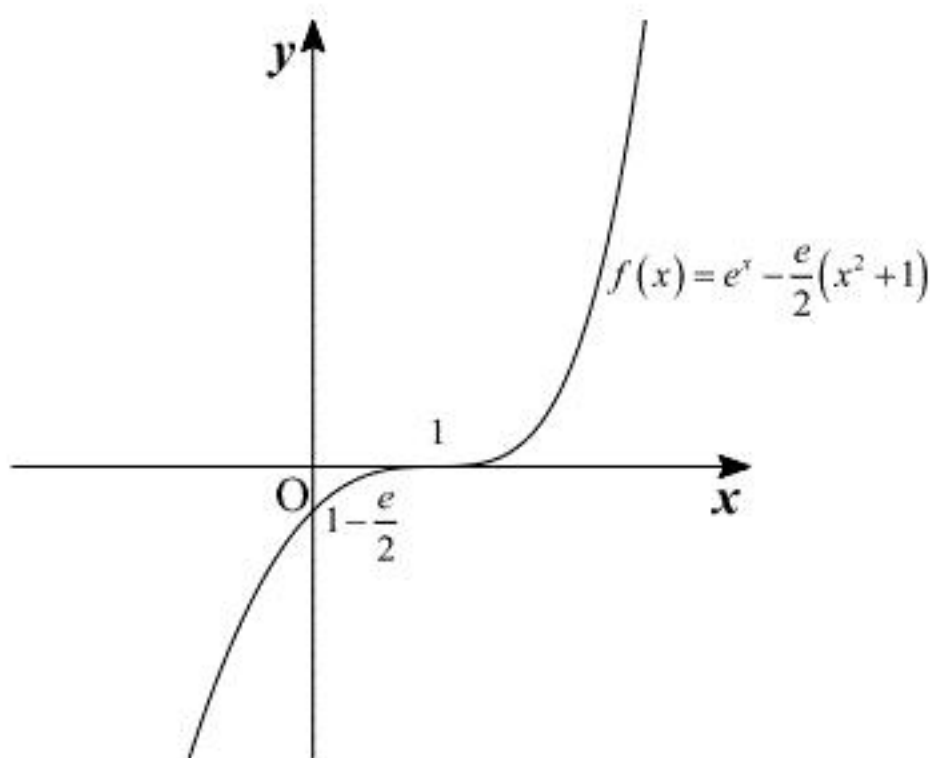
|          |            |   |            |
|----------|------------|---|------------|
| $x$      | ...        | 1 | ...        |
| $f''(x)$ | -          | 0 | +          |
| $f'(x)$  | $\searrow$ |   | $\nearrow$ |

$$f'(1) = e^1 - e \cdot 1 = 0$$

であり、増減表を利用して  $x = 1$  のとき  $f'(x) = 0$ 、 $x \neq 1$  のとき  $f'(x) > 0$  となる。これより、 $f(x)$  は広義の意味で単調増加する。以上から、 $f(x)$  の増減表は以下のようなになる。

|          |            |   |            |
|----------|------------|---|------------|
| $x$      | ...        | 1 | ...        |
| $f''(x)$ | -          | 0 | +          |
| $f'(x)$  | +          | 0 | +          |
| $f(x)$   | $\nearrow$ |   | $\nearrow$ |

増減表より、グラフの概形は以下のようなになる。



(答) 前図

(2)

$$g(x) = e^{\sqrt{x}} \text{ とすると,}$$

$$g'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

となるから、 $(t, e^{\sqrt{t}})$  ( $t > 0$ ) における接線は、

$$\begin{aligned} y &= g'(t)(x-t) + g(t) \\ &= \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}x + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)e^{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

となる。これが、 $(-1, 0)$  を通るから、

$$\begin{aligned} \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} + \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)e^{\sqrt{t}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(t - 2\sqrt{t} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(\sqrt{t} - 1)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 1 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。これを接線の方程式に代入して、

$$y = \frac{e}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)e = \frac{e}{2}(x+1)$$

となる。

(答)  $y = \frac{e}{2}(x+1)$

(1)

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + z^2 \leq 1$$

に  $z = t$  を代入すると,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + t^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)^2 \leq 2 - t^2$$

となる。ここで、 $x, y$  は実数であるから  $x^2 + y^2 + 1 \geq 1$  より,

$$1 \leq 2 - t^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - t^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - t)(1 + t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |t| \leq 1$$

となる。 $|t| > 1$  のとき、切り口の面積は 0 である。 $|t| \leq 1$  のとき、

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 \leq 2 - t^2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2 - t^2} \leq x^2 + y^2 + 1 \leq \sqrt{2 - t^2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2 - t^2} - 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2 - t^2} - 1$$

$$\therefore 0 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2 - t^2} - 1 \quad (\because x, y \text{ は実数})$$

となるから、この断面は半径  $\sqrt{\sqrt{2 - t^2} - 1}$  の円となる。よって、

$$\pi(\sqrt{2 - t^2} - 1)$$

となる。以上より、求める面積は

$$\begin{cases} 0 & (|t| > 1) \\ \pi(\sqrt{2 - t^2} - 1) & (|t| \leq 1) \end{cases}$$

である。

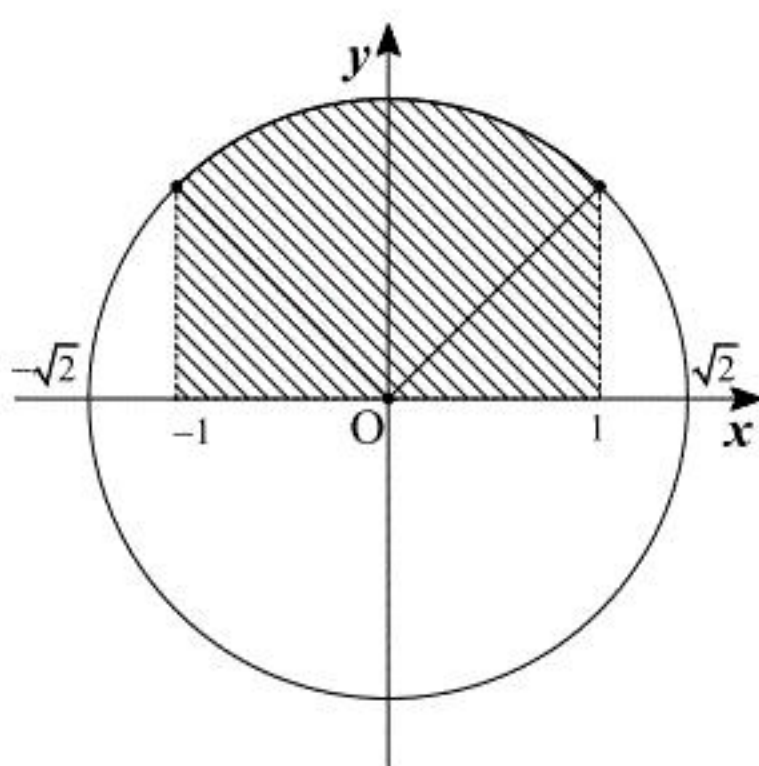
$$(\text{答}) \begin{cases} 0 & (|t| > 1) \\ \pi(\sqrt{2 - t^2} - 1) & (|t| \leq 1) \end{cases}$$

(2)

(1)より、求める体積は

$$\int_{-1}^1 \pi(\sqrt{2 - t^2} - 1) dt = \pi \int_{-1}^1 \sqrt{2 - t^2} dt - \int_{-1}^1 \pi dt$$

となる。ここで、 $\int_{-1}^1 \sqrt{2 - t^2} dt$  は以下の円の一部である斜線部の面積に等しい。



よって、 $\int_{-1}^1 \sqrt{2 - t^2} dt$  は半径  $\sqrt{2}$  で中心角  $\frac{\pi}{2}$  の円と 2 つの直角二等辺三角形の面積の和に等しく、

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2 - t^2} dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

となる。また、

$$\int_{-1}^1 \pi dt = [\pi t]_{-1}^1 = 2\pi$$

となる。よって、求める体積は、

$$\pi \int_{-1}^1 \sqrt{2 - t^2} dt - \int_{-1}^1 \pi dt = \pi \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) - 2\pi = \pi \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

(1)

$l$  上の点は、実数  $t$  を用いて、

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) + t(1, 1, -3)$$

となる。これが、 $xy$  平面と交わる時、 $z=0$  である。よって、

$$\frac{3}{2} - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

となり、このとき

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2}(1, 1, -3) = (1, 0, 0)$$

となる。

(答)  $(1, 0, 0)$ 

(2)

$$\vec{q} = (x_1, y_1, z_1)$$

と置くと、

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $P(-2, 0, 0), Q(0, -1, 0), R(0, 0, 2)$  とおくと、

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0, -1, 0) - (-2, 0, 0) = (2, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (0, 0, 2) - (-2, 0, 0) = (2, 0, 2)$$

となる。 $\vec{q}$  は  $\alpha$  に垂直であるから、 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$  と垂直である。よって、

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (2, -1, 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 2x_1$$

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (2, 0, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -x_1$$

となる。これを①に代入して、

$$x_1^2 + (2x_1)^2 + (-x_1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 6x_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

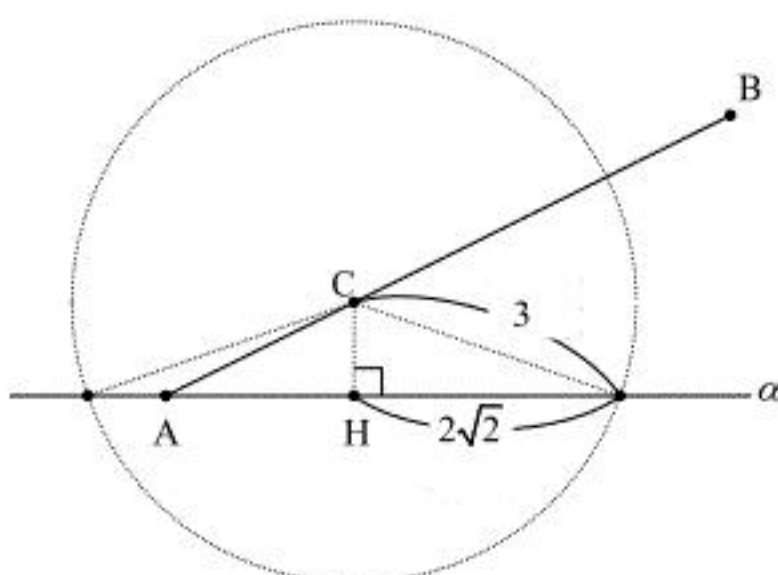
となる。これより、

$$\vec{q} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

となる。

(答)  $\vec{q} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ 

(3)



点  $C$  から平面  $\alpha$  に下した垂線の足は球の断面の円の中心に等しく、この点を点  $H$  とする。切り口の円の半径を  $r$  とすると、

$$\pi r^2 = 8\pi \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$$

である。 $HC$  と平面  $\alpha$  は垂直であるから、三平方の定理を用いて、

$$CH = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

となる。また、(2)より、 $\overrightarrow{CH} // \vec{q}$  である。よって、 $CH=1$  となるには、 $\overrightarrow{AC}$  の  $\vec{q}$  に対する正射影ベクトルの大きさが  $1$  であればよい。点  $C$  は直線  $AB$  上の点であるから、

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} = k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

とすることができて、

$$\frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{q}|}{|\vec{q}|} = \left| k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1) \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}|k|$$

となる。これが  $1$  になるため、 $k = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$  となるが、点  $C$  は線分  $AB$  上にあるため  $0 \leq k \leq 1$  であるから  $k = \frac{2}{\sqrt{6}}$  となる。これより、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}, \frac{-3+\sqrt{6}}{6}, \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{6}, \frac{-3+\sqrt{6}}{6}, \frac{3-\sqrt{6}}{2}\right)$