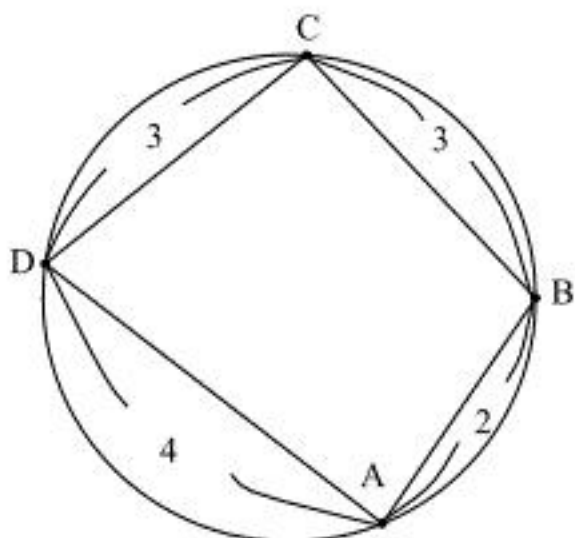


1

(1)



円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから、 $\angle ABC = 180^\circ - \angle CDA$ であり、

$$\cos \angle CDA = -\cos \angle ABC$$

が成り立つ。三角形 ABC について余弦定理より、

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \angle ABC = 13 - 12 \cos \angle ABC$$

・・・①

である。同様に三角形 CDA について余弦定理より、

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos \angle CDA = 9 + 16 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \angle ABC = 25 + 24 \cos \angle ABC$$

・・・②

である。①、②から、

$$13 - 12 \cos \angle ABC = 25 + 24 \cos \angle ABC$$

$$\Leftrightarrow 36 \cos \angle ABC = -12$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle ABC = -\frac{1}{3}$$

となる。これを①に代入すると、

$$AC^2 = 13 - 12 \left(-\frac{1}{3} \right) = 17$$

となり、 $AC > 0$ であるから、

$$AC = \sqrt{17}$$

である。

(答) $AC = \sqrt{17}$

(2)

$$\sin \angle CDA = \sin (180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC$$

であり、 $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より、

$$\sin \angle ABC = \sin \angle CDA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

である。よって三角形 ABC の面積は、

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

である。同様に三角形 CDA の面積は、

$$\frac{1}{2} CD \cdot DA \sin \angle CDA = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

である。よって四角形 ABCD の面積は、

$$2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

である。

(答) $6\sqrt{2}$

対数の底, 真数の条件から,

$$\begin{cases} |x| > 0 & \dots \textcircled{1} \\ |x| \neq 1 & \dots \textcircled{2} \\ x - 9y^2 + 2 > 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。 $|x| > 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x - 9y^2 + 2) &> 2 \\ \Leftrightarrow x - 9y^2 + 2 &> |x|^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x + 9y^2 &< 2 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} &< \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &< 1 \end{aligned}$$

である。また, $0 < |x| < 1$ のとき同様にして,

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(x - 9y^2 + 2) &> 2 \\ \Leftrightarrow x - 9y^2 + 2 &< |x|^2 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} &> \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &> 1 \end{aligned}$$

である。①, ②より x の取りうる範囲は以上であるから, これらと③を合わせれば求める領域となる。ここで,

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow x > 9y^2 - 2$$

である。また, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \textcircled{4}$ と $x - 9y^2 + 2 = 0 \dots \textcircled{5}$ の交点を考える。⑤

より,

$$y^2 = \frac{x+2}{9} \dots \textcircled{6}$$

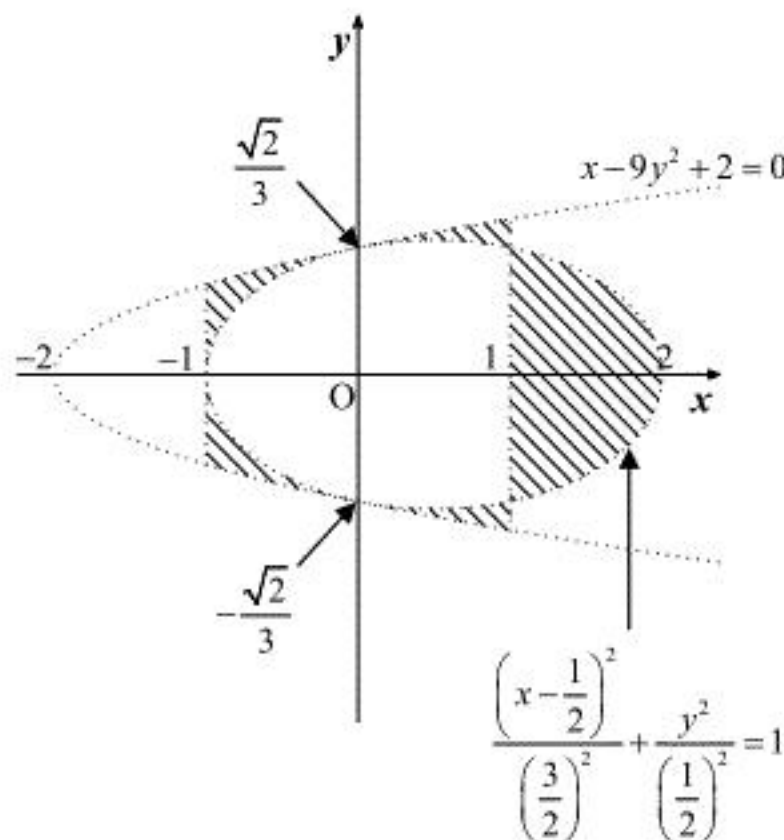
であり, これを④に代入して交点の x 座標を求めると,

$$\begin{aligned} \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (x+2) &= \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

である。これを⑥に代入して交点の y 座標を求めると,

$$y^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

である。よって, 交点の座標は, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ である。以上より求める領域は下図のようになる。ただし境界線は含まない。



3

(1)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (-x+1)e^{-x}$$

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

であり、 $e^{-x} > 0$ に注意すると、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

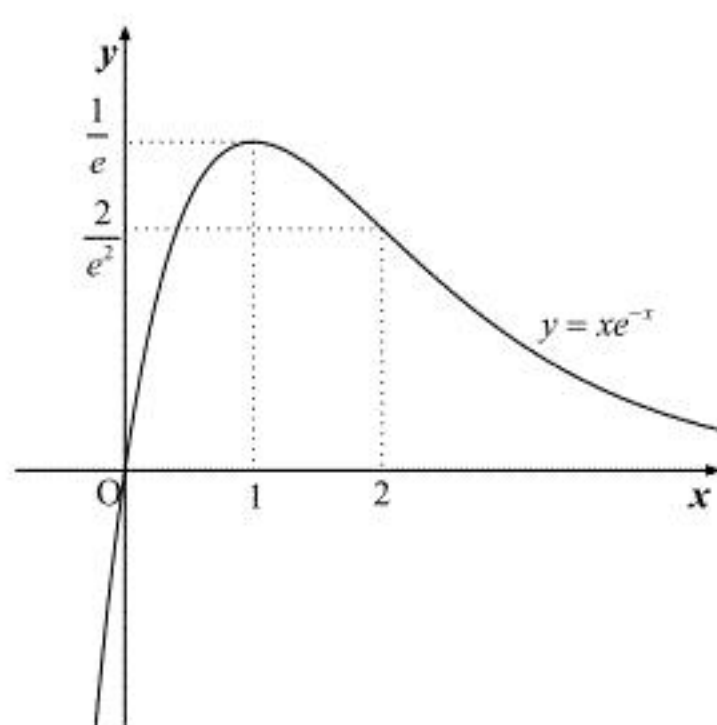
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

である。増減表は下表のようになり、 $y = f(x)$ は、 $x = 1$ で極大値 $\frac{1}{e}$ をとる。また、変曲点は

$\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ である。

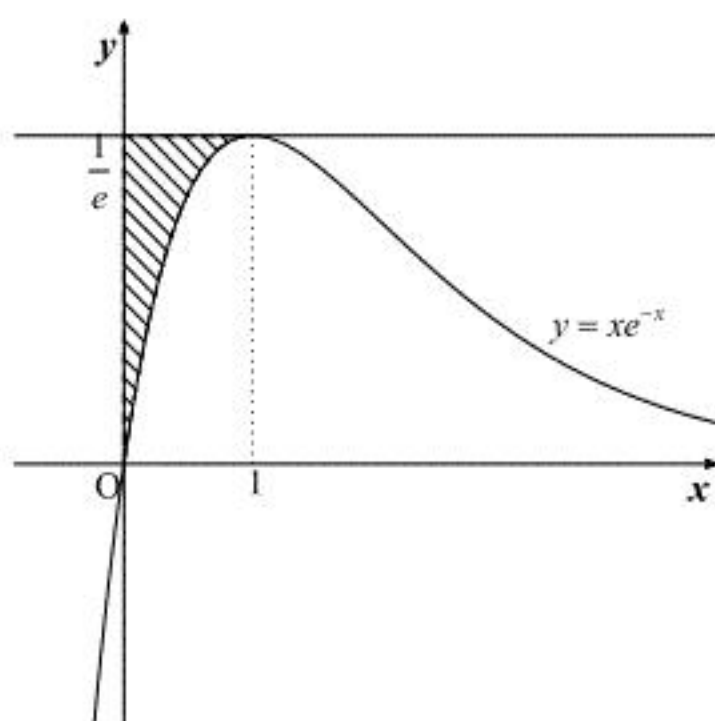
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いると、 $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答)前図

(2)



上図の斜線部を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は

$$V = \int_0^1 \pi \left\{ (e^{-1})^2 - (xe^{-x})^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_0^1 (e^{-2} - x^2 e^{-2x}) dx$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= \left[-\frac{x^2 e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx \\ &= \left(-\frac{1}{2e^2} - 0 \right) + \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2} dx \\ &= -\frac{1}{2e^2} + \left(-\frac{1}{2e^2} - 0 \right) + \left[-\frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2e^2} + \left(-\frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2} \end{aligned}$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^{-2} - x^2 e^{-2x}) dx \\ &= \pi \left\{ e^{-2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4e^2} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{9}{e^2} - 1 \right) \end{aligned}$$

である。

(答) $V = \frac{\pi}{4} \left(\frac{9}{e^2} - 1 \right)$

(1)

領域 D は,

$$\begin{cases} x^2 + 4y + 6 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + \frac{7}{8} \geq 0 \end{cases}$$

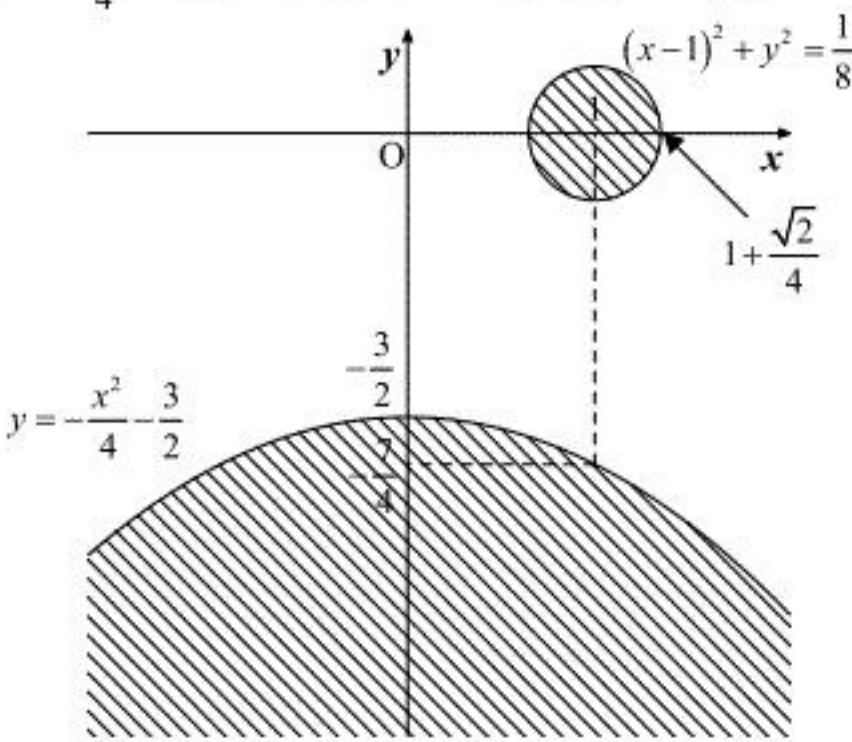
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 + y^2 \geq \frac{1}{8} \end{cases}$$

であるか、または

$$\begin{cases} x^2 + 4y + 6 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + \frac{7}{8} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{8} \end{cases}$$

である領域である。ここで、放物線 $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}$ は、点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ を頂点とする上に凸の放物線だから、 $y \leq -\frac{3}{2}$ の範囲にある。また、円 $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{8}$ は、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ の円であるから、 $y \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}$ の範囲にある。以上より、領域 D は下図のようになる。



(答)前図

(2)

$x + y = k$ とおくと、 $y = -x + k$ と変形でき、これは直線の方程式を示している。この直線 $y = -x + k$ が前問の図の斜線部と共通部分を持つような k のとりうる範囲を求めればよい。

[1] 直線 $y = -x + k$ が円とその内部 $x^2 + y^2 - 2x + \frac{7}{8} \leq 0$ と共通部分を持つ場合

これは、直線 $y = -x + k$ と点 $(1, 0)$ の距離が $\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 以下であることと同値である。これは、

$$\frac{|1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow |k-1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$$

と同値である。

[2] 直線 $y = -x + k$ が領域 $y \leq -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}$ と共通部分を持つ場合

$$y = -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2} \text{ に直線の式を代入した,}$$

$$-x + k = -\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 + 4k = 0$$

が実数解を持てばよい。その条件は判別式を D として、

$$\frac{D}{4} = 4 - (6 + 4k) = -4k - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{2}$$

である。

以上[1], [2]より、求める範囲は $k \leq -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ である。

(答) $k \leq -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

(3)

$$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - x - y + 2 = (x+y)^3 - (x+y) + 2 = k^3 - k + 2$$

であるから、 $f(k) = k^3 - k + 2$ とおく。 k の定義域は前問で得られた $k \leq -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ とする。このとき、

$$f'(k) = 3k^2 - 1$$

$$= (\sqrt{3}k + 1)(\sqrt{3}k - 1)$$

である。よって、増減表は下表のようになる。

k	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{3}{2}$
$f'(k)$	+	0	-				-	0	+	
$f(k)$	$\nearrow$	$2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$\frac{19}{8}$		$\frac{13}{8}$	$\searrow$	$2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$\frac{31}{8}$

$\frac{31}{8} > 2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > \frac{13}{8}$ であるから、求める最大値は $\frac{31}{8}$ である。

(答) $\frac{31}{8}$

(1)

$$\frac{25}{99} = 0.\dot{2}\dot{5}$$

であるから、 $P(1)$ は $a_1 = 1, 2$ となる確率である。よって、

$$P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。同様に $P(2)$ は $a_1 = 1$ となるか、 $a_1 = 2$ かつ $a_2 \leq 5$ となる確率である。よって、

$$P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$$

である。同様に $P(4)$ は $a_1 = 1$ となるか、 $a_1 = 2$ かつ $a_2 \leq 4$ となるか、 $a_1 = 2$ かつ $a_2 = 5$ かつ $a_3 = 1$ となるか、 $a_1 = 2$ かつ $a_2 = 5$ かつ $a_3 = 2$ かつ $a_4 \leq 5$ となる確率である。よって、

$$P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{371}{1296}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P(1) = \frac{1}{3}, P(2) = \frac{11}{36}, P(4) = \frac{371}{1296}$$

(2)

$X_{2m} \leq \frac{25}{99}$ となるのは、 $X_{2m+2} \leq \frac{25}{99}$ となる場合か、 $a_{2n-1} = 2, a_{2n} = 5$ ($n = 1, 2, \dots, m$), $a_{2m+1} \geq 3$

となる場合か、 $a_{2n-1} = 2, a_{2n} = 5$ ($n = 1, 2, \dots, m$), $a_{2m+1} = 2, a_{2m+2} = 6$ となる場合である。よって、

$$\begin{aligned} P(2m) &= P(2m+2) + \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P(2m+2) = P(2m) - 25 \left(\frac{1}{6}\right)^{2m+2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} P(2m+2) &= P(2m) - 25 \left(\frac{1}{6}\right)^{2m+2} \\ &\Leftrightarrow P(2m+2) - \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m+2} = P(2m) - \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} \end{aligned}$$

である。 $m \geq 2$ とすると、

$$\begin{aligned} P(2m) - \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m} &= P(2m-2) - \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m-2} \\ &= \dots \\ &= P(2) - \frac{5}{252} \\ &= \frac{2}{7} \left(\because P(2) = \frac{11}{36} \right) \end{aligned}$$

であり、これは $m = 1$ でも成り立つ。よってすべての m について、

$$P(2m) = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P(2m+2) = P(2m) - 25 \left(\frac{1}{6}\right)^{2m+2}, \quad P(2m) = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^{2m}$$

(3)

前問の結果より、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(2m) = \frac{2}{7}$$

である。また、 $X_{n+1} \leq \frac{25}{99} \Rightarrow X_n \leq \frac{25}{99}$ であるから、 $P(n+1) \leq P(n)$ である。よって、

$$P(2m+2) \leq P(2m+1) \leq P(2m)$$

である。 $\lim_{m \rightarrow \infty} P(2m) = \frac{2}{7}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} P(2m+2) = \frac{2}{7}$ であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(2m+1) = \frac{2}{7}$$

である。以上より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \frac{2}{7}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \frac{2}{7}$$