

(1)

$a < b$ であるため、 $|a - b| = b - a$ である。

[1] $x < a$ のとき

$$\begin{aligned} |x - a| + |x - b| &= |a - b| \\ \Leftrightarrow (a - x) + (b - x) &= b - a \\ \Leftrightarrow x &= a \end{aligned}$$

となるが、これは $x < a$ を満たさないため不適である。

[2] $a \leq x < b$ のとき

$$\begin{aligned} |x - a| + |x - b| &= (x - a) + (b - x) \\ &= b - a \\ &= |a - b| \end{aligned}$$

となるため、与式は常に成り立つ。

[3] $x \geq b$ のとき

$$\begin{aligned} |x - a| + |x - b| &= |a - b| \\ \Leftrightarrow (x - a) + (x - b) &= b - a \\ \Leftrightarrow x &= b \end{aligned}$$

となり、これは $x \geq b$ を満たす。

以上、[1], [2], [3]より、求める実数 x の値の範囲は $a \leq x \leq b$ となる。

(答) $a \leq x \leq b$

(2)

数学的帰納法を利用して、任意の自然数 n に対し、

$$n \leq a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す。

[1] $n = 1$ のとき

a_1 は自然数であるため、 $1 \leq a_1$ である。よって、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n = k$ (k は自然数) のとき

$\textcircled{1}$ が成り立つ、すなわち、 $k \leq a_k$ と仮定する。 $k < k + 1$ より $a_k < a_{k+1}$ であるため、

$$k \leq a_k < a_{k+1}$$

が得られ、 $k < a_{k+1}$ となる。 k, a_{k+1} はともに自然数であるため、

$$k + 1 \leq a_{k+1}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ は $n = k + 1$ のときも成り立つ。

以上、[1], [2]より、任意の自然数 n に対し $n \leq a_n$ が成り立つ。

(証明終)

(1)

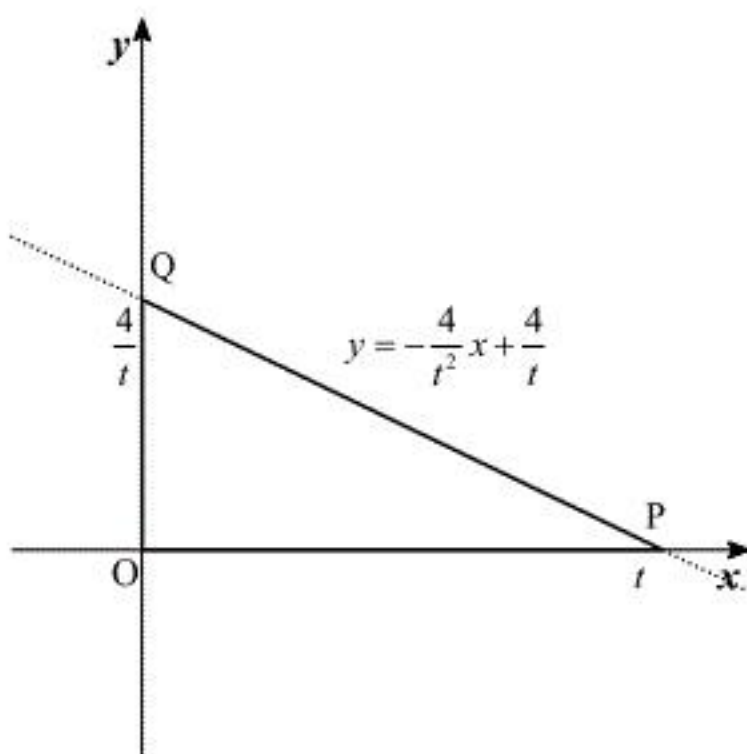
点 Q の座標を $(0, s)$ ($s > 0$) とおくと, $\triangle OPQ = 2$ であるため,

$$\frac{1}{2}st = 2 \Leftrightarrow s = \frac{4}{t} \quad (\because t > 0)$$

となる。よって, 直線 PQ の方程式は

$$y = \frac{\frac{4}{t} - 0}{0 - t}(x - t) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{t^2}x + \frac{4}{t}$$

であるため, $\triangle OPQ$ は下図のようになる。



したがって, 上図より点 (x, y) が線分 PQ 上にある条件は

$$y = -\frac{4}{t^2}x + \frac{4}{t} \text{ かつ } x > 0, y > 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{4}{t^2}x + \frac{4}{t} \text{ かつ } x > 0, y > 0$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{t^2}x + \frac{4}{t} \\ \Leftrightarrow yt^2 - 4t + 4x &= 0 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

である。ここで, $f(t) = yt^2 - 4t + 4x$ とおくと, 第一象限の点 (x, y) が領域 E 内にあるための条件は, t についての方程式 $f(t) = 0$ が正の実数解をもつことである。さらに,

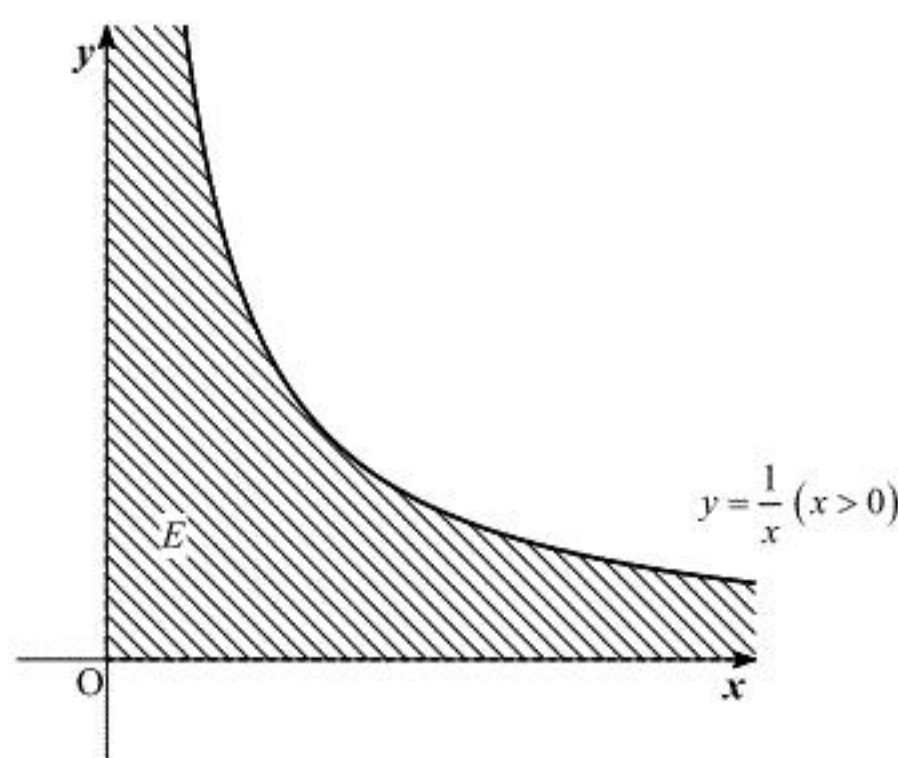
$$\begin{aligned} f(t) &= yt^2 - 4t + 4x \\ &= y\left(t - \frac{2}{y}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{y}\right) \quad (\because y > 0) \end{aligned}$$

となり, また, $y > 0$ であるため, 求める条件は,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4\left(x - \frac{1}{y}\right) \leq 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow 0 < y \leq \frac{1}{x} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

である。よって, 求める領域は $E = \left\{ (x, y) \mid x > 0, 0 < y \leq \frac{1}{x} \right\}$ であり, 領域 E は下図の斜線部の

ようになる。ただし, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を含み, x 軸と y 軸を含まない。



(答) 前図 ただし, 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を含み, x 軸と y 軸を含まない

3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^2(1-x^2) \\ &= -x^4 - 2x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 - 6x^2 + 2 \\ &= -4(x+1)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、閉区間 $[0, 1]$ における $f(x)$ の増減は下表の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	極大 $f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0

したがって、関数 $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ のときに最大値をとり、その値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{27}{16} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{27}{16}$

(2)

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ 、 $0 \leq \cos \theta \leq 1$ となるため、 $A \geq 0$ 、 $B \geq 0$ である。また、

$$\begin{aligned} A^2 &= (1 + \sin \theta)^2 \cos^2 \theta \\ &= (1 + \sin \theta)^2 (1 - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となるため、 $f(\sin \theta) = A^2$ である。さらに、 $0 \leq \sin \theta \leq 1$ であるため、(1)より、 A^2 は $\sin \theta = \frac{1}{2}$

のとき最大値 $\frac{27}{16}$ をとる。よって、 $A \geq 0$ 、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 A は $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をと

る。一方、

$$\begin{aligned} B^2 &= (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \\ &= (1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

となるため、 $f(\cos \theta) = B^2$ である。さらに、 $0 \leq \cos \theta \leq 1$ であるため、(1)より、 B^2 は $\cos \theta = \frac{1}{2}$

のとき最大値 $\frac{27}{16}$ をとる。よって、 $B \geq 0$ 、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 B は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をと

る。したがって、 A の最大値と B の最大値は等しい。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \gamma \\ &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \\ &= 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \quad (\because \alpha + \beta + \gamma = \pi) \\ &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \end{aligned}$$

となる。 γ ($0 < \gamma < \pi$) を固定すると、 $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \frac{\gamma}{2} > 0$ である。また、

$0 < \alpha < \pi - \gamma$ 、 $0 < \beta < \pi - \gamma$ 、 $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ において、 $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ であり、 $\alpha = \beta$ のとき

$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ となるため、 $2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma$ は $\alpha = \beta$ のとき最大値 $2 \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma$ をとる。

ここで、

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= 2 \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

であり、 $0 < \gamma < \pi$ より $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるため、(2)より、 $\left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2}$ は $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{6}$ のとき、すな

わち $\gamma = \frac{\pi}{3}$ のとき、最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。よって、 $0 < \gamma < \pi$ において、

$$2 \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

が成り立つ。以上より、 $0 < \alpha < \pi$ 、 $0 < \beta < \pi$ 、 $0 < \gamma < \pi$ 、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ のとき

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

が成り立ち、等号成立条件は、

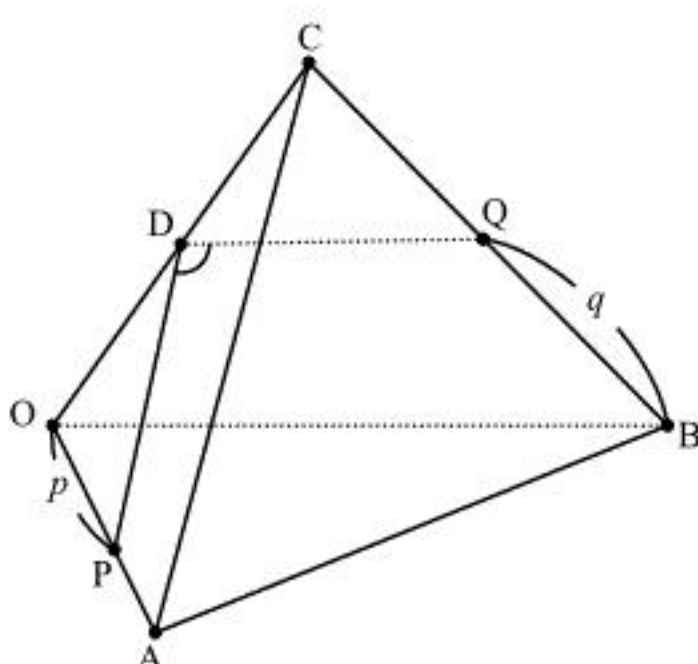
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \alpha = \beta \\ \gamma = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$$

である。したがって、 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ は $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(1)

正四面体OABCと点D, P, Qの位置関係は下図のようになる。



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。BC=6, BQ= q であり、点Qは辺BC上にあるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \overrightarrow{OB} + \frac{q}{6} \overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + \frac{q}{6} (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \left(1 - \frac{q}{6}\right) \vec{b} + \frac{q}{6} \vec{c} \\ &= \left(1 - \frac{q}{6}\right) (3, 3\sqrt{3}, 0) + \frac{q}{6} (3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6}) \\ &= \left(3, \sqrt{3} \left(3 - \frac{q}{3}\right), \frac{\sqrt{6}}{3} q\right)\end{aligned}$$

となる。よって、点Qの座標は $\left(3, \sqrt{3} \left(3 - \frac{q}{3}\right), \frac{\sqrt{6}}{3} q\right)$ となる。

$$(\text{答}) \left(3, \sqrt{3} \left(3 - \frac{q}{3}\right), \frac{\sqrt{6}}{3} q\right)$$

(2)

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ はすべて一辺の長さが6の正三角形であるため、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 6 \cdot 6 \cos 60^\circ = 18$$

となる。ここで、点Dは辺OCの中点であるため、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \vec{c}$$

となる。また、OA=6, OP= p となるため、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{p}{6} \vec{a}$$

となる。さらに、(1)より、

$$\overrightarrow{OQ} = \left(1 - \frac{q}{6}\right) \vec{b} + \frac{q}{6} \vec{c}$$

である。ここで、

$$\angle PDQ = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DP} \perp \overrightarrow{DQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0 \quad (\because \overrightarrow{DP} \neq \vec{0}, \overrightarrow{DQ} \neq \vec{0})$$

である。また、

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{6} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{c}\right) \cdot \left\{\left(1 - \frac{q}{6}\right) \vec{b} + \frac{q}{6} \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{c}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{6} \left(1 - \frac{q}{6}\right) \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{6}\right) \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{p}{6} \left(\frac{q}{6} - \frac{1}{2}\right) \vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{6} - \frac{1}{2}\right) |\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18 \left\{ \frac{p}{6} \left(1 - \frac{q}{6}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{6}\right) + \frac{p}{6} \left(\frac{q}{6} - \frac{1}{2}\right) \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{q}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot 6^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \{ p(6-q) - 3(6-q) + p(q-3) - 6(q-3) \} = 0$$

$$\therefore p = q$$

となるため、 $\angle PDQ = 90^\circ$ となるための必要十分条件は $p = q$ である。

$$(\text{答}) \quad p = q$$

(3)

$\angle PDQ = 90^\circ$ かつ $p = 3$ であるため、(2)より、 $p = q = 3$ となる。よって、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

である。また、点Eは辺AB上の点であるため、実数 k を用いて $\overrightarrow{OE} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ と表せる。

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= k\vec{a} + (1-k)\vec{b} \\ &= 2(k-1) \cdot \frac{1}{2} \vec{c} + 2k \cdot \frac{1}{2} \vec{a} + 2(1-k) \left(\frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) \\ &= 2(k-1) \overrightarrow{OD} + 2k \overrightarrow{OP} + 2(1-k) \overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

が成り立つ。点Eは平面DPQ上の点であり、3点D, P, Qは一直線上に存在しないため、

$$2(k-1) + 2k + 2(1-k) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} (6, 0, 0) + \frac{1}{2} (3, 3\sqrt{3}, 0) \\ &= \left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0 \right)\end{aligned}$$

となるため、点Eの座標は $\left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ である。

$$(\text{答}) \left(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

(1)

取り出す玉の色の種類は3通りであり、5個の箱のそれぞれから1種類の色の玉を取り出すため、求める確率は、

$$P_1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81}$$

となる。

$$(\text{答}) P_1 = \frac{1}{81}$$

(2)

取り出す2種類の玉の色の選び方は

$${}_3C_2 = 3$$

より、3通りである。求める確率は5個の箱のそれぞれから2種類の色の玉のいずれかを取り出す確率から、その2種類の色のうち1種類の色の玉のみを取り出す確率を引いた値である。したがって、求める確率は、

$$P_2 = 3 \cdot \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right\} = \frac{10}{27}$$

となる。

$$(\text{答}) P_2 = \frac{10}{27}$$

(3)

1, 2回目のどちらの場合も取り出す玉の色の種類が2種類にならなければよい。(2)より、求める確率は、

$$\begin{aligned} P_3 &= (1 - P_2)^2 \\ &= \left(1 - \frac{10}{27}\right)^2 \\ &= \frac{289}{729} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) P_3 = \frac{289}{729}$$